Maticové modely v teoretickej fyzike
Domáca úloha 2

Akékoľvek otázky smelo smerujte na
`juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

Príklad 1 (Jakobián = Vandermondov determinant)**.** Maticu M zapíšeme v tvare $M = U\Lambda U^\dagger$ a počítame dM_{ij}. Rozmyslíme si, že kvôli invariatnosti miery môžeme všetko počítať okolo $U = \mathbb{1}$ a dokážeme

$$\left(\prod_i dM_{ii}\right)\left(\prod_{i<j} d\mathrm{Re}M_{ij} d\mathrm{Im}M_{ij}\right) = dU \left(\prod_i d\Lambda_{ii}\right)\left[\prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)^2\right] .$$

Návod. Môže sa zísť, že $UU^\dagger = \mathbb{1}$ a rozmyslieť si, čo dá tento vzťah pre dU_{ij} a $dU^\dagger_{ij}$.

Príklad 2 (2cut riešenie kvartického modelu)**.** Rozmyslite si, že aj funkcia

$$\omega(z) = \frac{1}{2}V'(z) - h(z)\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$$

vie byť riešním Riemann-Hilbertovho problému

$$\omega(\lambda + i\varepsilon) + \omega(\lambda - i\varepsilon) = V'(\lambda)$$

pre kvartický potenciál $V(x) = rx^2/2 + gx^4$. Z podmienky

$$\omega(z) \sim_{z\to\infty} \frac{1}{z}$$

sa pokúste nájsť rovnice určujúce konštanty a, b, c, d. Uvidíte, že tie nie sú určené jednoznačne. Rozmyslite si, čo to znamená a nájdtie riešenie zodpovedajúce symetrickému supportu hustoty pravdepodobnosti pre vlastné hodnoty $\rho(\lambda)$. Nakoniec nájdite aj túto hustotu.

Príklad 3 (Fázový prechod)**.** Za akých podmienok na r, g existuje riešenie z prechádzajúcej úlohy? Mali by ste dostať, že existuje presne vtedy, keď neexistuje riešenie z príkladu 6 prechádzajúcej sady.

Z nasledujúcich vzťahov pre voľnú energiu si rozmyslite, že pri zmene parametrov, ktorá pretína hranicu rozdeľujúce tieto dve riešenia, dochádza k zmene voľnej energie tak, že niektorá z jej derivácií je nespojitá. Ktorá?

$$\begin{aligned} F_{1cut} &= \frac{-r^2\delta^2 + 40r\delta}{384} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\delta}{4}\right) + \frac{3}{8} , \\ F_{2cut} &= -\frac{r^2}{16g} + \frac{1}{4}\log(4g) + \frac{3}{8} . \end{aligned}$$

kde $\delta = a^2$ pre 1cut riešenie z príkladu 6 predchádzajúcej sady.

Príklad 4 (Diagramy reloaded)**.** Pre model jednej hermitovskej náhodnej $N \times N$ matice s rozdelením pravdepodobnosti

$$P(M) \sim e^{-N\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(M^2\right)}$$

explicitne vypočítajte strednú hodnotu

$$\left\langle \mathrm{Tr}\left(M^4\right)\mathrm{Tr}\left(M^4\right)\right\rangle .$$

Špeciálne explicitne ukážte, že kontrakcia medzi dvoma stopami vediet na giagram, ktorý je nižšieho rádu v N.

Príklad 5 (Vandermondov determinant = ozaj determinant)**.** Ukážte, že platí rovnosť

$$\prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_N & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{vmatrix} .$$

Príklad 6 (Gaussovské hermitovské matice)**.** Na prednáške sme zistili, že ortogonálne polynómi pre jednoduchý potenciál $V(x) = \frac{1}{2}rx^2$ sú Hermitove polynómi. Z ich explicitného tvaru a zo vzťahu

$$\rho(\lambda) = K(\lambda, \lambda) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \psi_n(\lambda)\psi_n(\lambda)$$

nájdite rozdelenie vlastných hodnôt postupne pre zväčšujúce sa hodnoty N a sledujte, ako sa toto rozdelenie približuje ku polkruhovému.