

Maticové modely v teoretickej fyzike

Domáca úloha 1 - prednášky 1 až 2

Akokoľvek otázky smelo smerujte na
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Príklad 1 (Štatistika vlastných hodnôt). Majme takéto tri rôzne súbory náhodných štvorcových $N \times N$ matíc

- symetrická matica, ktorej vstupy sú rovnomerne náhodne 1 a -1 ,
- symetrická matica, ktorej vstupy sú rovnomerne náhodne 2 a -2 ,
- symetrická matica, ktorej vstupy sú rozdelené podľa normálneho rozdelenia

$$N(\mu = 0, \sigma^2 = 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- hermitovská matica, ktorej diagonálne vstupy sú rozdelené podľa $N(0, 1)$ a reálna a imaginárna časť mimodiagonálnych vstupov podľa $N(0, 1/2)$.

Postupne pre zväčšujúce sa hodnoty N pre všetky tri súbory

- vygenerujte väčší počet matíc zo súboru,
- nájdite ich vlastné hodnoty,
- vykreslite histogram týchto vlastných hodnôt,
- sledujte, čo sa s týmto histogramom deje pri zväčšovaní N .

Príklad 2 (Trojrozmerný Gauss). Majme Gaussovský integrál v troch rozmeroch x_1, x_2, x_3 a pravidlami párovania:

$$\begin{array}{ll} x_1 - x_1 & \text{faktor } 1 \\ x_2 - x_2 & \text{faktor } 1 \\ x_3 - x_3 & \text{faktor } 1 \\ x_1 - x_2 & \text{faktor } 0 \\ x_2 - x_3 & \text{faktor } a \\ x_1 - x_3 & \text{faktor } b \end{array}$$

Ako vyzerá matica A^{-1} a matica A v pôvodnom rozdelení $e^{-\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}/2}$? Aká je hodnota integrálu

$$\langle x_1^2 x_2^2 x_3^2 \rangle ?$$

Overte tento výsledok explicitným výpočtom integrálu

$$\int dx_1 dx_2 dx_3 x_1^2 x_2^2 x_3^2 e^{-\frac{1}{2} \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}} .$$

Príklad 3 (Diagramy). Pre model jednej hermitovskej náhodnej $N \times N$ matice s rozdelením pravdepodobnosti

$$P(M) \sim e^{-\frac{1}{2}\text{Tr}(M^2)}$$

explicitne vypočítajte strednú hodnotu

$$\langle \text{Tr}(M^6) \rangle .$$

Príklad 4 (Polkruhové rozdelenie pravdepodobnosti). Ukážte, že pre polkruhové rozdelenie pravdepodobnosti

$$\rho(x) = \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - x^2}$$

sú momenty $\langle x^{2n} \rangle$ dané n -tým Catalanovým číslom

$$\langle x^{2n} \rangle = \left(\frac{R}{2}\right)^{2n} C_n = \left(\frac{R}{2}\right)^{2n} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} .$$

Prečítajte si na wikipédii článok o Catalanových číslach a ujasnite si ich súvis s kreslením rovinných diagramov.