Maticové modely v teoretickej fyzike
Domáca úloha 2

Akékoľvek otázky smelo smerujte na
`juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

Príklad 1 (Diagramy reloaded). Pre model jednej hermitovskej náhodnej $N \times N$ matice s rozdelením pravdepodobnosti

$$P(M) \sim e^{-N\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(M^2\right)}$$

explicitne vypočítajte strednú hodnotu

$$\left\langle \mathrm{Tr}\left(M^4\right)\mathrm{Tr}\left(M^4\right)\right\rangle \ .$$

Špeciálne explicitne ukážte, že kontrakcia medzi dvoma stopami vedie na diagram, ktorý je nižšieho rádu v N.

Tiež explicine ukážte, že súvislé diagramy platí podobné tvrdenie ako pre predtým: faktor N, s ktorým sa škáluje príspevok diagramu, úvisí s topológiou plochy, na ktorú sa dá zakresliť bez samopriesekov.

Príklad 2 (Jakobián = Vandermondov determinant). Maticu M zapíšeme v tvare $M = U\Lambda U^\dagger$ a počítame dM_{ij}. Rozmyslíme si, že kvôli invariatnosti miery môžeme všetko počítať okolo $U = \mathbb{1}$ a dokážeme

$$\left(\prod_i dM_{ii}\right)\left(\prod_{i<j} d\mathrm{Re}M_{ij} d\mathrm{Im}M_{ij}\right) = dU\left(\prod_i d\Lambda_{ii}\right)\left[\prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)^2\right] \ .$$

Návod. Môže sa zísť, že $UU^\dagger = \mathbb{1}$ a rozmyslieť si, čo dá tento vzťah pre dU_{ij} a $dU^\dagger_{ij}$.

Príklad 3 (Rezolventa a generujúca funkcia.). Pre ľubovoľné rozdelenie pravdepodobnosti $\rho(x)$ zaveďme funkciu

$$\omega(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\rho(x)}{z-x} \ .$$

Túto funkciu voláme rezolventa. Rozmyslite si, že jej význam je v tom, že koeficienty jej rozvoja v mocninách $1/z$ sú momenty rozdelenia ρ, tj. že platí

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \frac{1}{z^{k+1}} \ ,$$

kde m_k nejak súvisí s k tym momentom $\left\langle x^k \right\rangle$.

Ak zadefinujeme priamo generujúcu funkciu

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle x^k \right\rangle t^k$$

rozmyslite si, že platí

$$\omega(z) = \frac{1}{z}\phi(1/z) \ .$$

Príklad 4 (Sedlový bod)**.** Majme funkcie v tvare

$$\Delta_N(x) = C_N e^{-N^2 f(x)}$$

pre nejakú funkciu $f(x)$. Rozmyslite si, že táto postupnosť konverguje k δ-funckií v minime funkcie $f(x)$, tj.

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Delta_N(x)\phi(x) = \phi(x_0) \ ,$$

kde $f'(x_0) = 0$. Nájdite normalizačné konštanty C_N aby to platilo. Čo ak je táto podmienka splnená pre viacero bodov?

Príklad 5 (Diskontinuita odmocniny)**.** Funkcia $f(x) = \sqrt{x}$ je ako funcia reálne premennej dobre definovaná pre $x \geq 0$. Pre komplexný argument $z = re^{i\theta}$ je jej hodnota

$$f(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \ ,$$

čo dáva pre z blížiace sa k zápornej reálnej osi dva rôzne výsledky $\pm i\sqrt{r}$ podľa toho, z ktorého smeru prichádzame.

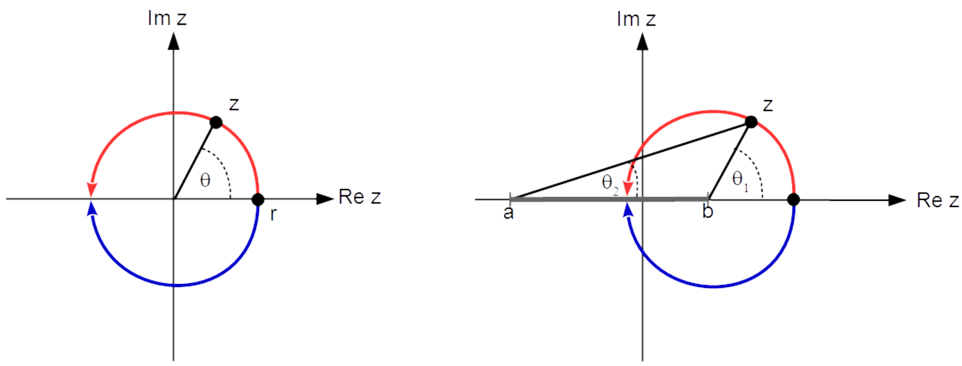
Na základe toho si rozmyslite, že funkcia

$$\omega(z) = \frac{1}{2} V'(z) - h(z)\sqrt{(z-a)(z-b)}$$

bude spĺňať rovnicu

$$\omega(\lambda + i\varepsilon) + \omega(\lambda - i\varepsilon) = V'(\lambda)$$

pre vhodne zvolené $a, b, h(z)$.



Príklad 6 (Kvartický model)**.** Majme kvartický model jednej hermitovskej matice, tj.

$$P(M) \sim e^{-N^2\left[\frac{1}{2}\frac{1}{N} r \operatorname{Tr}(M^2) + g\frac{1}{N}\operatorname{Tr}(M^4)\right]} \ ,$$

čo je situácia s $V(x) = rx^2/2 + gx^4$. Nájdite $a, b, h(z)$ vo výraze

$$\omega(z) = \frac{1}{2} V'(z) - h(z)\sqrt{(z-a)(z-b)} \ ,$$

pre ktoré táto funkcia spĺňa podmienky

$$\omega(\lambda + i\varepsilon) + \omega(\lambda - i\varepsilon) = V'(\lambda) \ , \ \omega(z) \sim_{z\to\infty} \frac{1}{z} \ .$$

Z rozvoja funkcie $\omega(z)$ v mocninách $1/z$ nájdite prvé dva momenty príslušnej hustoty vlastných hodnôt. Zo vzťahu

$$\rho(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\left[\omega(\lambda + i\varepsilon) - \omega(\lambda - i\varepsilon)\right]$$

nájdite hustotu vlastných hodnôt. Za akých podmienok je táto hustota dobre definovaná v prípade $r < 0$ a v prípade $g < 0$.