Maticové modely v teoretickej fyzike
Domáca úloha 3

Akékoľvek otázky smelo smerujte na
`juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

Príklad 1 (2cut riešenie kvartického modelu). Rozmyslite si, že aj funkcia

$$\omega(z) = \frac{1}{2}V'(z) - h(z)\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$$

vie byť riešním Riemann-Hilbertovho problému

$$\omega(\lambda + i\varepsilon) + \omega(\lambda - i\varepsilon) = V'(\lambda)$$

pre kvartický potenciál $V(x) = rx^2/2 + gx^4$. Z podmienky

$$\omega(z) \sim_{z\to\infty} \frac{1}{z}$$

sa pokúste nájsť rovnice určujúce konštanty a, b, c, d. Uvidíte, že tie nie sú určené jednoznačne. Rozmyslite si, čo to znamená a nájdtie riešenie zodpovedajúce symetrickému supportu hustoty pravdepodobnosti pre vlastné hodnoty $\rho(\lambda)$. Nakoniec nájdite aj túto hustotu.

Príklad 2 (Fázový prechod). Za akých podmienok na r, g existuje riešenie z prechádzajúcej úlohy? Mali by ste dostať, že existuje presne vtedy, keď neexistuje riešenie z príkladu 4 prechádzajúcej sady.

Z nasledujúcich vzťahov pre voľnú energiu si rozmyslite, že pri zmene parametrov, ktorá pretína hranicu rozdeľujúce tieto dve riešenia, dochádza k zmene voľnej energie tak, že niektorá z jej derivácií je nespojitá. Ktorá?

$$F_{1cut} = \frac{-r^2\delta^2 + 40r\delta}{384} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\delta}{4}\right) + \frac{3}{8} \,,$$
$$F_{2cut} = -\frac{r^2}{16g} + \frac{1}{4}\log(4g) + \frac{3}{8} \,.$$

kde $\delta = a^2$ pre 1cut riešenie z príkladu 6 predchádzajúcej sady.

Príklad 3 (Jednoduchý multi-trace model.). Majme kvartický maticový model, ktorý má v rozdelení pravdepodobnosti druhú mocninu druhého momentu

$$S(M) = \frac{1}{2}r\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(M^2\right) + g\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(M^4\right) + h\left[\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(M^2\right)\right]^2 \,.$$

Nájdite zodpovedajúci single-trace maticový model, nájdite symetrické 1cut a 2cut riešenia a nájdite čiaru fázového prechodu medzi nimi. Čo sa deje s fázovým prechodom pre kladné a čo pre záporné N.

Bonus. Nájdite vzťah pre voľnú energiu týchto riešení a vyšetrite vlastnosti fázového prechodu.

Príklad 4 (Vandermondov determinant = ozaj determinant)**.** Ukážte, že platí rovnosť

$$\prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & \lambda_N & \lambda_N^2 & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{vmatrix} .$$

Ako presne by vyzerali lineárne kombinácie, ktoré prevedú túto maticu na maticu s polynómami $P_n = x^n - nx^{n-1} + n^2$?

Príklad 5 (Gaussovské hermitovské matice)**.** Na prednáške sme zistili, že ortogonálne polynómi pre jednoduchý potenciál $V(x) = \frac{1}{2}rx^2$ sú Hermitove polynómi. Z ich explicitného tvaru a zo vzťahu

$$\rho(\lambda) = K(\lambda, \lambda) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\psi_n(\lambda)\psi_n(\lambda)$$

nájdite rozdelenie vlastných hodnôt postupne pre zväčšujúce sa hodnoty N a sledujte, ako sa toto rozdelenie približuje ku polkruhovému.