

Maticové modely v teoretickej fyzike

Domáca úloha 4

Akokoľvek otázky smelo smerujte na
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Príklad 1 (Fuzzy sféra pre $N = 2, 3$). Pre $N = 2$ tvoria bázu priestoru všetkých hermitovských matíc Pauliho matice σ_i a jednotková matica σ_0 . Ako musia byť matice normalizované, aby sme ich mohli prehlásiť za polarizačné tenzory? Ako vyzerá zobrazenie na sférické harmoniky s $l \leq 1$, aby všetko fungovalo ako má?

Nájdite koeficienty pre rozklad matice

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

ktorá reprezentuje najviac lokalizovaný stav okolo severného pólu, do bázy polarizačných tenzorov a nakreslite zodpovedajúcu funkciu.

Pre $N = 3$ tvoria bázu priestoru všetkých hermitovských matíc Gell-Manove matice λ_i a jednotková matica λ_0 . Ako sa zmenia predchádzajúce výsledky v tomto prípade?

Porovnajte tvar lokalizovaného balíka v týchto dvoch príkladoch a nestačte sa čudovať.

Príklad 2 (Súčiním, súčiniš, súčiníme). Rozklad lokalizovaného balíka v okolí severného pólu (1) z predchádzajúcej úlohy otočte rotačnou maticou na stav Φ' , ktorý je lokalizovaný okolo nejakého bodu na rovníku. Spravte potom súčin $\Phi\Phi'$ a pre výslednú maticu nájdite zodpovedajúcu funkciu. Porovnajte výsledok s obyčajným pobodovým súčinom funkcií zodpovedajúcich Φ a Φ' .

Príklad 3 (Bonus. Fuzzy sféra pre väčšie N). Nájdite explicitný tvar polarizačných tenzorov pre všeobecné N v termínoch Chritofelovych symbolov. Potom zvolte nejaké rozumne vysokú hodnotu a zopakujte postup z prechádzajúcich dvoch úloh.

Príklad 4 (Pohybová rovnica pre jednoduchý maticový model). Majme maticový model s Euklidovskou signatúrou pre $d = 3$ s účinkom

$$S = \frac{1}{g^2} \text{Tr} \left([X^a, X^b][X_a, X_b] - 2m^2 X^a X_a \right).$$

Nájdite podmienku pre minimum tohto účinku. Ukážte, že jej riešením je napríklad aj fuzzy sféra a nájdite jej polomer ako funkciu parametrov modelu.

Návod.

$$\frac{\partial X_{ij}}{\partial X_{kl}} = \delta_{ik}\delta_{jl}.$$

Príklad 5 (Paper). Prečítajte si článok

Gravity as a Quantum Effect on Quantum Space-Time

a sledujte známe, resp. neznáme slová, čo dáva a čo nedáva zmysel a ako veľmi ste schopní sledovať, čo sa v článku deje.