METÓDY RIEŠENIA FYZIKÁLNYCH ÚLOH 1 leto19 – Príklady 2

VZOROVÉ RIEŠENIA

Cvičenie 14.3.2019

Príklad 1

a. The initial energy is

$$E_i = \frac{1}{2}kx^2$$

and the final energy is

$$E_f = mg(2R - 2r) + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

For the ball not to lose contact,

$$\frac{mv^2}{R} = mg.$$

Using conservation of energy, it follows that

$$x_{\min} = \sqrt{\frac{54mg}{10k}(R-r)}$$

b. A simple application of conservation of energy yields

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgH,$$

or

$$H = \frac{27}{10}(R-r).$$

Príklad 2

a) Wok má zrejme ťažisko na svojej osi. Ak označíme xz je výšku na povrchom keď je položený dnom nahor, potom práca potrebná na jeho prevrátenie je

$$mg\left(\sqrt{z^2+R^2} - z\right)$$

kde $m = 2\pi R^2\sigma$ je hmotnosť woku. Ide o rozdiel potenciálnej energie v najnižšej a najvyššej polohe.

Ostáva určiť z. Wok si nasekáme vodorovne na veľmi tenké pásiky, postupne vo výške y. Každý si môžme predstaviť ako malý valec s polomerom $\sqrt{R^2-y^2}$ a výškou

$$dl = \sqrt{dx^2+dy^2} = dy\sqrt{1+\frac{1}{|f'|^2}}$$

kde f' je derivácia vyjadrenia kužnice $y = \sqrt{R^2-x^2}$ ako funkcia y. Vypočítame a dostaneme pre hmotnosť pásika vo výške y

$$dm = \sigma 2\pi\sqrt{R^2-y^2}\sqrt{1+\frac{y^2}{R^2-y^2}}\,dy = 2\pi\sigma dy\ .$$

Všetky pásiky majú teda rovnakú hmotnosť (plochu) a neprekvapí nás teda, že výsledné ťažisko bude v polovici výšky woku

$$z = \frac{1}{2\pi R^2\sigma}\int_0^R dm\,y = \frac{1}{R}\int_0^R dy\,y = \frac{R}{2}\ .$$

Výsledná energia je teda

$$2\pi\sigma R^3\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\ .$$

b)

Balík treba dostať do miesta, v ktorom sa gravitačná sila od planéty vyrovná gravitačnej sile od mesiaca. Za týmto miestom už bude teleso padať smerom k mesiacu. [1] Ak označíme d vzdialenosť tohto miesta od stredu planéty, dostávame

$$\frac{GM_P\delta}{d^2} = \frac{GM_M\delta}{(r-d)^2} \;\to\; d = r\frac{1 \pm \sqrt{\frac{M_M}{M_P}}}{1 - \frac{M_M}{M_P}} \;.$$

Dostávame dve hodnoty, tá medzi planétou a mesiacom je so znamienkom mínus. Ostáva dopočítať, koľko energie treba balíčku na povrchu planéty dodať, aby sa dostal do tohto miesta. Na povrchu zeme má energiu

$$-\frac{GM_P\delta}{R_M} - \frac{GM_M\delta}{r - R_M}$$

v mieste kde sú vyrovnané sily má energiu

$$-\frac{GM_P\delta}{d} - \frac{GM_M\delta}{r-d} \;.$$

Ostáva urobiť rozdiel týchto dvoch energií a dosadiť za d. Vyjde čosi ako

$$E = \delta g\frac{\left(\sqrt{M_p}(r - R_M) - \sqrt{M_M}R_M\right)^2}{rR_M(r - R_M)} \;.$$

[1] Kde ho bude treba zastaviť, ale to už je iný príbeh.

Príklad 3

The (almost uniform) field from the charge will induce $\mp Q$ charges on the front and back sides of the plate, so that the field inside metal is zero, and those charges will be attracted towards the point charge with force

$$\boxed{F = \frac{q^2Sd}{2\pi r^5}} \qquad (Gauss\ units) \qquad or \qquad \boxed{F = \frac{q^2Sd}{8\pi^2\varepsilon_0 r^5}} \qquad (SI)$$

Príklad 4

Also,

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \tfrac{\partial H}{\partial p_x} = 2p_x\ ,\ \dot{p}_x = -\tfrac{\partial H}{\partial x} = -2x\ p_y^2(0) = -2x \\
\Rightarrow \ddot{x} &= -4x \;\Rightarrow\; x = A\sin 2t \\
\dot{x}(0) &= 2A = 2p_x(0) = 2 \;\Rightarrow\; A = 1 \\
\dot{y} &= \tfrac{\partial H}{\partial p_y} = 2x^2 p_y\,; \\
\Rightarrow \dot{y} &= 2\sin^2 2t\sqrt{1-y^2} \\
\tfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} &= 2dt\ \sin^2 2t = dt(1-\cos\ 4t) \\
\downarrow\quad & \\
\sin^{-1} y &= t - \tfrac{1}{4}\sin 4t \\
\Rightarrow y &= \sin\left(t - \tfrac{1}{4}\sin 4t\right) \\
x &= \sin 2t.
\end{aligned}$$

Príklad 5

(a) For the case where there is no dielectric, we can use Gauss' law to find the electric field at a radius r

$$\int E\, dA = \frac{Q_{enclosed}}{\epsilon}$$

$$E 2\pi r \ell = \frac{\ell}{L}(\frac{Q}{\epsilon})$$

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon L} \times \frac{1}{r}$$

(b) To find the capacitance, we use

$$C = \frac{Q}{V}$$

We can use the solution to (a) to find V from

$V = -\int E\, dr$ (where r goes from a to r)

$$V = -\frac{Q}{2\pi\epsilon L}\int \left(\frac{dr}{r}\right)$$

$$V_{ab} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Therefore

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

(c) When we pull the dielectric out, then we will have a length x which has no dielectric in it, and a length $L - x$ which has dielectric in it. So the net capacitance will be that of two capacitors in parallel

$$C = C_{x-no\ dielectric} + C_{L-x-with\ dielectric}$$

Where the capacitance with no dielectric has a similar form to that found in part (b) except that we use ϵ_0 instead of ϵ. So

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}[x + \frac{\epsilon}{\epsilon_0}(L - x)]$$

Where the change in capacitance is therefore given by

$$dC = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}(1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_0})dx$$

The change in the work will be equal to the change in the potential energy. Recall that V remains constant since it is attached to a battery. So

$$Fdx + VdQ = \frac{1}{2}V^2 dC$$

Where

$$dQ = VdC$$

So if we substitute that in to the work equation, we get

$$Fdx + V(VdC) = \frac{1}{2}V^2 dC$$

$$Fdx = -\frac{1}{2}V^2 dC$$

So we can substitute in for dC and then substitute in the work equation to get

$$Fdx = -\frac{1}{2}V^2 \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}(1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_0})dx$$

$$F = V^2 \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1)$$