METÓDY RIEŠENIA FYZIKÁLNYCH ÚLOH zima20 – Príklady 3

VZOROVÉ RIEŠENIA

Cvičenie 5.11.2020

Príklad 1

Na to, aby sme zistili, aký je moment zotrvačnosti Samkovej vysušenej cibule, si musíme uvedomiť niekoľko vecí. Prvým – pomerne triviálnym – poznatkom je, že moment zotrvačnosti gule je $\frac{2}{5}mR^2$, kde m je hmotnosť plnej gule. Druhým poznatkom je fakt, že moment zotrvačnosti je aditívny: ak je výsledný objekt tvorený viacerými časťami, moment zotrvačnosti výsledného objektu okolo ľubovoľnej osi je súčtom momentov zotrvačností jednotlivých častí okolo tej istej osi. Ako posledné si stačí uvedomiť, že ak každý dĺžkový rozmer zväčšíme k-krát, hmotnosť sa zväčší k^3-krát. Inak povedané, treba vedieť škálovať.

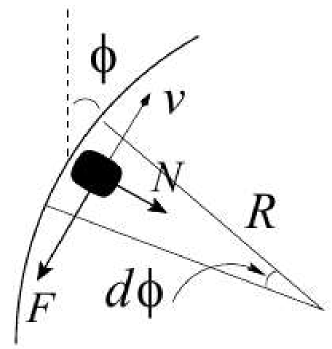
Po tomto krátkom úvode sa môžeme pustiť do počítania. Prázdna časť cibule má rovnaký tvar ako jej plná časť, len je menšia, s faktorom škálovania dve tretiny. Všeobecný výraz momentu zotrvačnosti má tvar cMR^2 pre nejakú konštantu c. Hmotnosť M sa škáluje s treťou mocninou rozmeru, polomer R s prvou, takže moment zotrvačnosti prázdnej časti bude $\left(\frac{2}{3}\right)^5$-násobkom momentu zotrvačnosti plnej časti. Sčítaním momentu zotrvačnosti plnej a prázdnej časti by sme mali dostať moment zotrvačnosti celej gule. Ak označíme moment zotrvačnosti plnej časti I, platí

$$\frac{2}{5}mR^2 = I + \left(\frac{2}{3}\right)^5 I.$$

V tomto prípade m predstavuje hmotnosť plnej gule, takže keď ju vyjadríme rovnakým spôsobom pomocou hmotnosti cibule M, platí $m = M + \left(\frac{2}{3}\right)^3 M$. Z toho už triviálne dostaneme

$$I = \frac{2}{5}\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^3}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^5}MR^2 = \frac{126}{275}MR^2.$$

Príklad 2



Consider a point where velocity of the object makes angle ϕ with the original direction, and take the curvature radius here to be R. Relevant equations are:

$$m\frac{v^2}{R} = N \qquad and \qquad F = \mu N$$

and thus

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -FRd\phi = -\mu m v^2 d\phi$$

giving

$$\boxed{K = K_0 e^{-2\mu\alpha}}$$

- this answer does not depend on the exact details of the curve, its shape or length, as long as there are no sharp corners anywhere. The only parameter that matters is the angle between final and initial velocities!

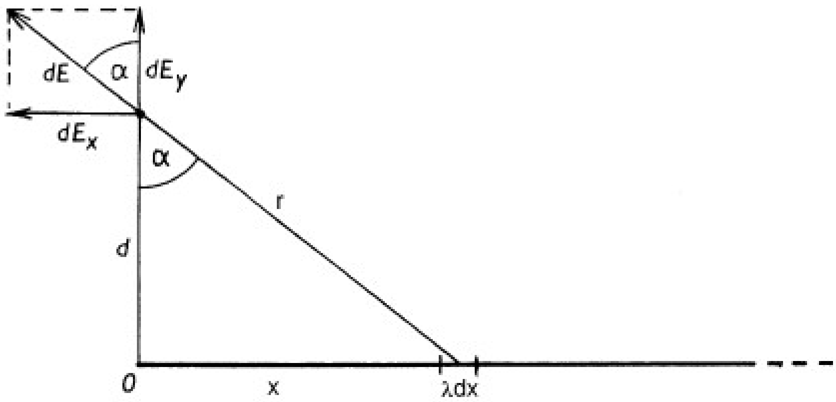
Príklad 3

35. Intenzita elektrického poľa od nábojového elementu λdx (*obr. R35*) vo vzdialenosti r je daná výrazom

$$dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

a zložky v smeroch osí x a y

$$dE_x = -\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha \qquad dE_y = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha$$



Ak vezmeme do úvahy, že $x = d\,\mathrm{tg}\alpha$, $dx = (d/\cos^2\alpha)d\alpha$ a $r = d/\cos\alpha$, možno posledné výrazy uviesť na tvar

$$dE_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\sin\alpha d\alpha \qquad dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\cos\alpha d\alpha$$

Integráciou týchto výrazov podľa α od 0 po $\pi/2$ dostaneme

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d} \qquad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

Veľkosť vektora intenzity elektrického poľa

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

a uhol, ktorý zviera vektor $\boldsymbol{E}$ s osou x

$$\alpha_0 = \mathrm{arctg}\frac{E_y}{|E_x|} = 45^\circ$$

Príklad 4

a) Integrals of motion for a central potential $V(r)$:

Angular momentum $L = rV_t = r^2\dot{\phi}$ (V_t = tangential velocity)

Energy per unit mass $E = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + V_t^2) + V(r) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$,

$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2r^2}$.

Circular orbit: $\dot{r} = 0 \rightarrow \frac{dV_{eff}}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{L^2}{r^3} = \frac{V_t^2}{r} = r\dot{\phi}^2$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \omega_\phi = \frac{L}{r^2} = \left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\right)^{1/2}$, $\boxed{P_\phi = \frac{2\pi}{\omega_\phi} = 2\pi\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\right)^{-1/2}}$

b) $r(t) = r_0 + \epsilon(t)$ with $(dV_{eff}/dr)(r_0) = 0$, $\epsilon^2 \ll r_0^2$.

Energy per unit mass: $E = \frac{1}{2}\dot{\epsilon}^2 + V_{eff}(r_0+\epsilon)$.

Taylor expand: $V_{eff}(r_0+\epsilon) = V_{eff}(r_0) + \left(\frac{dV_{eff}}{dr}\right)_{r_0}^{\,0}\epsilon + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\right)_{r_0}\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$

$\therefore\ E - V_{eff}(r_0) = \frac{1}{2}\dot{\epsilon}^2 + \frac{1}{2}\omega_r^2\epsilon^2 + O(\epsilon^3) = \text{constant}$

$$\boxed{\omega_r \equiv \left(\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\right)^{1/2}_{r_0}}$$

this is the simple harmonic oscillator equation, and its general solution is

$$\boxed{\epsilon(t) = \frac{\sqrt{2(E-E_0)}}{\omega_r}\cos[\omega_r(t-t_0)]}$$

where $E_0 \equiv V_{eff}(r_0)$ and t_0 is an arbitrary constant.

Now write ω_r in terms of $V(r)$ instead of $V_{eff}(r)$:

$$\omega_r^2 = \frac{d^2V_{eff}}{dr^2} = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{3L^2}{r^4} = \frac{d^2V}{dr^2} + 3\omega_\phi^2 = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{dV}{dr}$$

$$\boxed{\omega_r = \left[\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{dV}{dr}\right]^{1/2}_{r_0} = \left[\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}\left(r^3\frac{dV}{dr}\right)\right]^{1/2}_{r_0}}$$

Radial period $P_r = \frac{2\pi}{\omega_r}$

c) Stability is determined by the sign of ω_r^2: $\omega_r^2 > 0$ for stability.

$\omega_r^2 = \frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}\left(r^3\frac{dV}{dr}\right)$, $V(r) = -\frac{GM}{r}e^{-kr}$

$\rightarrow\ \omega_r^2 = \frac{GM}{r^3}e^{-kr}\left[1 + kr - (kr)^2\right]$

$1 + kr - (kr)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + kr\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} - kr\right) > 0$ only if $kr < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\therefore$ The circular orbits are unstable for $kr > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

d) The outermost stable circular orbit is at $r_0 = \frac{\sqrt{5}+1}{2K}$.

It has energy per unit mass $E = V(r_0) + \frac{1}{2}(r_0 \omega_\phi)^2 = V(r_0) + \frac{1}{2}\left(r\frac{dV}{dr}\right)_{r_0}$

$$E = \frac{GM}{r_0} e^{-Kr_0}\left[\frac{1}{2}(Kr_0 - 1)\right] = \frac{GM}{r_0} e^{-Kr_0}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) > 0$$

If r_0 is decreased slightly, the orbit is absolutely stable and $E>0$. The effective potential for the Yukawa potential has the form shown.