METÓDY RIEŠENIA FYZIKÁLNYCH ÚLOH zima20 – Príklady 6

VZOROVÉ RIEŠENIA

Cvičenie 6.12.2023

Príklad 1

Nejprve si ukážeme, že se koule při pružném nárazu rozletí do pravého úhlu. Označme počáteční vektor rychlosti jedné z koulí jako $\mathbf{v}_0$, její vektor rychlosti po srážce jako $\mathbf{v}$ a vektor rychlosti druhé koule jako $\mathbf{u}$. Pak platí zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie ve tvaru

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \qquad v_0^2 = v^2 + u^2 .$$

Umocněním první rovnice na druhou dostaneme

$$v_0^2 = v^2 + u^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} ,$$

což při porovnání se zákonem zachování energie dává podmínku $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$, čili že opravdu jsou vektory rychlostí po srážce navzájem kolmé a koule se pohybují po kolmých trajektoriích.

Stůl je symetrický podle dvou os. Na začátku si zvolíme jednu díru, do které budeme koule trefovat. Protože zelenou kouli umisťujeme na jednu z os symetrie, budou dvě ze čtyř řešení pro čtyři díry stejná. Naopak budou kvůli symetrii jiná řešení pro dvě díry, z nichž každá bude na jedné straně stolu podle delší hrany. Nalezený počet řešení pro jednu kouli tak na konci budeme muset vynásobit dvěma.

Při pružném nárazu do zdi se zachová tečná složka rychlosti koule, protože síla ode zdi působí pouze kolmo. Tato síla změní kolmou složku rychlosti na opačnou, jelikož se zachovává energie koule. Můžeme si proto stěnu představit jako zrcadlo a trajektorii koule jako paprsek. Ten můžeme protáhnout za stěnu a zrcadlově zobrazit díry ve stole i na druhé straně stěny. Toto můžeme udělat několikrát po sobě, zobrazíme si za první stěnu i další takové odrazy na téže a protější stěně.

Podle předchozího odstavce jsme si tedy pomocí zrcadlových odrazů zobrazili díru, do které mají spadnout obě koule (viz obrázek). Trajektorie koulí po srážce tvoří pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami, které z původního místa vedou do reálné a zobrazené díry. Bod, ve kterém dojde ke srážce, tak leží na Thaletových kružnicích, které mají středy vždy ve vzdálenosti

$$d_n = \frac{2ns}{2}$$

od trefované díry podél reálné kratší stěny kulečníku, přičemž $s = 3{,}5\,\text{stop}$ je délka kratší strany stolu. Poloměr kružnic je pak také d_n. Vzdálenost bodu, ve kterém dojde ke srážce, od této stěny, je pak

$$y_n = \sqrt{d_n^2 - \left(d_n - \frac{s}{2}\right)^2} = s\,\sqrt{n - \frac{1}{4}} .$$

Protože poměr delší strany $l = 7\,\text{stop}$ a kratší s je dva, všechny možné hodnoty y_n musí být menší než $2s$, což odpovídá

$$\sqrt{n - \frac{1}{4}} < 2 ,$$

přičemž zjistíme, že nejvyšším indexem, který toto splňuje, je $n = 4$. Pro jednu díru existují pouze čtyři takové pozice, které mají vlastnosti uvedené v zadání. Jak jsme komentovali výše, musíme tento výsledek vynásobit dvěma za všechny zbylé díry, přičemž jsme rychle ověřili, že žádná pozice neleží ve středu stolu. Správnou odpovědí na zadání je tedy číslo 8.

Príklad 2

(a) The total energy is $E = (M + m\gamma)c^2$ where $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$, and the total momentum is $P = mv\gamma$. Since $E^2 - P^2c^2$ is Lorentz invariant, the energy in the center of mass frame E' is given by

$$E' = \sqrt{E^2 - P^2c^2} = c\sqrt{(M+m\gamma)^2c^2 - m^2v^2\gamma^2} = c^2\sqrt{M^2 + 2mM\gamma + m^2}\,.$$

After the fission, half of E' is carried by one of the daughter nuclei with momentum p' whose energy is $c\sqrt{(p')^2 + (M')^2c^2}$. Equating the two gives

$$p' = \frac{c}{2}\sqrt{M^2 + 2mM\gamma + m^2 - 4(M')^2}\,.$$

(b) Let the magnitude of the momentum of either e^- or $\bar{\nu}_e$ be p_2. From momentum conservation, we have $2p_2\cos\theta = p_1$ and energy conservation gives $2p_2c + c\sqrt{p_1^2 + m_p^2c^2} = m_nc^2$. Eliminating p_2 from the first equation, and using the second, we get

$$\cos\theta = \frac{p_1}{m_nc - \sqrt{(p_1)^2 + m_p^2c^2}}\,.$$

The expression on the right-hand side is a monotonically increasing function of p_1. Since $0 \le \cos\theta \le 1$, we have

$$0 \le p_1 \le \frac{(m_n^2 - m_p^2)c}{2m_N}\,.$$

When $p_1 = 0$, we have $\theta = \pi/2$ and e^- and $\bar{\nu}_e$ are back to back. In the other limit when $p_1 = (m_n^2 - m_p^2)c/(2m_N)$ we have $\theta = 0$ and $(e^-, \bar{\nu}_e)$ pair and the proton are back to back.

Príklad 3

SOLUTION: For a non-interacting ideal gas,

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} N \ln \zeta \,,$$

where ζ is the single-molecule partition function

$$\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \exp(-\beta n \varepsilon) \,.$$

This partition function can be evaluated as follows ($x \equiv \beta\varepsilon$):

$$\zeta = -e^x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\big(-(n+1)x\big) = -e^x \frac{d}{dx} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = [1-\exp(-\beta\varepsilon)]^{-2}.$$

Hence, the sought contribution to the energy is

$$E = \frac{2N\varepsilon}{\exp(\varepsilon/kT)-1} \,.$$

Alternatively, one can reproduce this result as follows. One can imagine that every molecule has two independent internal degrees of freedom of harmonic oscilator type, with energy spacing ε each. It is easy to see that this model gives the same spectrum and degeneracies if the energy is counted from the ground state. With this convention, the average energy of a single harmonic oscillator is $\varepsilon n_B(\varepsilon)$, where $n_B(\varepsilon)$ is the Bose-Einstein occupation number. Therefore, for the entire gas we get $E = 2N\varepsilon n_B(\varepsilon)$, in agreement with the first derivation.