METÓDY RIEŠENIA FYZIKÁLNYCH ÚLOH 1 leto24 – Príklady 5

VZOROVÉ RIEŠENIA

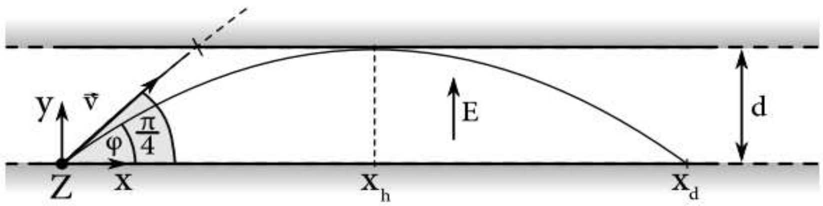
Cvičenie 11. 4. 2024

Príklad 1

22 Keďže uvažované elektrické pole je homogénne, na všetky vylietavajúce elektróny bude smerom nadol pôsobiť konštantná sila veľkosti Ee. Tá bude udeľovať elektrónom zrýchlenie $a = \frac{Ee}{m_e}$. Môžme si tiež uvedomiť, že gravitačná sila pôsobiaca na elektróny je oproti elektrickej sile zanedbateľná. Celá sústava je rotačne súmerná, takže vo výpočte sa stačí obmedziť na jeden rez obsahujúci zdroj. Analogicky k šikmému vrhu v homogénnom gravitačnom poli môžeme popísať súradnice elektrónu uniknuvšieho zo zdroja pod uhlom φ

$$x = v_x t = v\cos\varphi \cdot t,$$

$$y = v_y t - \frac{1}{2}at^2 = v\sin\varphi \cdot t - \frac{1}{2}at^2.$$



V závislosti na počiatočnej rýchlosti a elevačnom uhle elektrónu môžu vo všeobecnosti nastať tri prípady:

- elektrón narazí do hornej dosky kondenzátora;
- elektrón sa obtrie o hornú dosku kondenzátora;
- elektrón nedosiahne dostatočnú výšku na to, aby sa dotkol hornej dosky kondenzátora.

Pozrime sa na elektrón, ktorý sa práve obtrie o hornú dosku. Letiaci elektrón dosiahne svoju maximálnu výšku po čase

$$T = \frac{v_y}{a} = \frac{v\sin\varphi}{a}.$$

Ak tento čas dosadíme do vzorca pre y-súradnicu a položíme ju rovnú d, zistíme pod akým uhlom musí byť vypustený elektrón, aby svoju maximálnu výšku dosiahol práve vo výške dosky, čo teda znamená, že sa o ňu obtrie.

$$d = \frac{v^2\sin^2\varphi}{a} - \frac{v^2\sin^2\varphi}{2a} = \frac{v^2\sin^2\varphi}{2a},$$

$$\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{2ad}}{v}.$$

Ak do tohoto vzťahu dosadíme zadané hodnoty, vyjde uhol $\varphi \doteq 36{,}37°$. Tento uhol je menší ako 45°, čo znamená, že všetky elektróny, ktoré by mohli doletieť ďalej, narazia do hornej dosky. Ak dosadíme tento uhol spolu s časom T do rovnice pre x-súradnicu, zistíme v akej vzdialenosti od stredu sa budú elektróny obtierať o hornú dosku

$$x_h = \frac{v^2\cos\varphi\sin\varphi}{a}.$$

Vieme teda, že vrchol trajektórie takéhoto elektrónu je vo vodorovnej vzdialenosti x_h od zdroja. Ak si uvedomíme, že elektrón dosiahne vrchol trajektórie presne v polovici prejdenej vodorovnej vzdialenosti, zistíme, že maximálny dolet na spodnej doske je $x_d = 2x_h$.

Po dosadení hodnôt zo zadania dostávame $x_h = 2{,}715$ m. Ak vezmeme do úvahy rotačnú súmernosť úlohy, zistíme, že elektróny budú na hornú dosku dopadať do kruhu s polomerom 2,715 m a na dolnú dosku do kruhu s polomerom 5,43 m. Pre celkovú plochu dopadu teda dostávame výsledok

$$S = \pi\left(x_h^2 + x_d^2\right) = 5\pi x_h^2 \doteq 116\ \mathrm{m}^2.$$

Príklad 2

Príklad 3

Let y be the distance above the horizontal. The potential energy of the cylinder is just mgy and of the mass point is $mgy + mga\cos\theta/2$ and $y = a\theta\sin\alpha$, so the total potential energy is

$$V(\theta) = mg\left(2a\theta\sin\alpha + a\cos\theta/2\right).$$

The cylinder will roll freely when there are no stable points:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} &= mg\left(2\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin\theta\right) = 0 \rightarrow \\ 4\sin\alpha &= \sin\theta \end{aligned}$$

so when $\sin\theta > 1/4$, the cylinder begins to roll.

Alternatively, one may take torques around the contact point.

Príklad 4

SOLUTION:

Ohm's law for a wire of length l gives the voltage $V = I\rho l/A$. Therefore, the electric field strength in the wire is $E = V/l = I\rho/A$. Due to the difference in the resistivity of the materials the electric field strength has to be different in material 1 and material 2. According to Gauss's law, the difference in the electric field strengths implies an accumulation of charge at the boundary of the two materials. The net accumulated charge is

$$Q = \varepsilon_0 A(E_2 - E_1) = \varepsilon_0 I(\rho_2 - \rho_1), \tag{5}$$

where ε_0 is the electric constant.

Príklad 5

Electron has maximum momentum when neutrinos move in opposite direction

$\longleftarrow p_{\bar{\nu}_e}$

$\longleftarrow p_{\nu_\mu}$ $\qquad \longrightarrow p_e$ $\qquad$ in μ rest frame, $c=1$

Let $\vec{p}_\nu = \vec{p}_{\nu_e} + \vec{p}_{\nu_\mu}$. max when $\vec{p}_\nu = -\vec{p}_e$

$|\vec{p}_\nu| = |\vec{p}_e| \equiv p$.

$$m_\mu = E_\nu + E_e \qquad E_\nu = p_\nu \quad (\nu \text{ massless})$$

$$m_\mu = p + (p^2 + m_e^2)^{1/2}$$

$$(m_\mu - p)^2 = p^2 + m_e^2 \qquad m_\mu^2 - 2m_\mu p \cancel{+p^2} = \cancel{p^2} + m_e^2$$

$$p = \frac{m_\mu^2 - m_e^2}{2m_\mu}$$

$$E_e = (p^2 + m_e^2)^{1/2} = \left[\frac{m_\mu^4 - 2m_\mu^2 m_e^2 + m_e^4}{4m_\mu^2} + m_e^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{(m_\mu^2 + m_e^2)^2}{4m_\mu^2}\right]^{1/2} = \frac{m_\mu^2 + m_e^2}{2m_\mu}$$

Príklad 6

(a) Applying the law of conservation of energy for a bead of mass m and charge Q in the field of a dipole with dipole moment P gives

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + QP\tfrac{\cos\theta}{r^2} = \tfrac{1}{2}mv_0^2 + QP\tfrac{\cos(\pi/2)}{r^2} = 0$$

This gives the expression for the velocity of the bead v at angle θ

$$v = \sqrt{\tfrac{-2QP\cos\theta}{mr^2}}.$$

The bead moves along a circular path until it reaches the point opposite its starting position. The bead stops there and then goes back executing a periodic motion.

(b) The radial component of the force on the charge due to the dipole $F_{r-dipole}$ can be calculated as the derivative of the electric potential energy with respect to r

$$\tfrac{\partial}{\partial r}\left(QP\tfrac{\cos\theta}{r^2}\right) = -2QP\tfrac{\cos\theta}{r^3}.$$

For the circular motion $mv^2/r = F_{r-dipole} + F_{r-string}$. Substituting v and $F_{r-dipole}$ gives the normal force exerted by the string on the bead $F_{r-string} = 0$. If the string were not there, the bead would move along the circular path as with the string.