METÓDY RIEŠENIA FYZIKÁLNYCH ÚLOH zima22 – Príklady 5

VZOROVÉ RIEŠENIA

Cvičenie 30.11.2023

Príklad 1

4. Two blocks and two pulleys (Question from Dave, solution from Peter)

Most straightforward to use Lagrangian with constraint for fixed length of rope:

$L = \frac{1}{2}\left(m_1 \dot{x}^2 + m_2 \dot{y}^2\right) + m_1 g x$ where (referring to the diagram with the problem) x

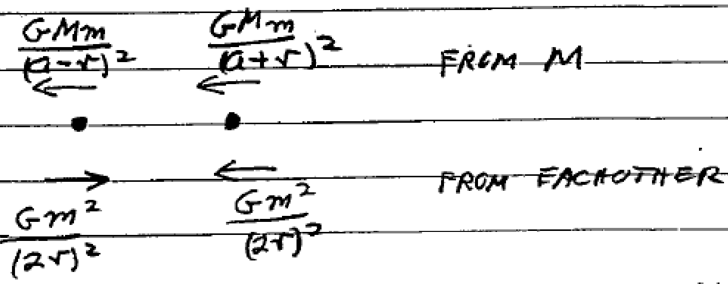
$g(x, y) = 0 = x + 2y + d - l$

increases downward and y increases to the right. The rope has length l and d accounts for all the rope not taken up by x and y. Also from the constraint, we have $\ddot{x} = -2\ddot{y}$. Using the Euler-Lagrange equations with undetermined multiplier gives

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x} - m_1 g + \lambda &= 0 \\ m_2\ddot{y} + 2\lambda &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} -2m_1\ddot{x} + 2m_1 g - 2\lambda &= 0 \\ -\frac{m_2\ddot{x}}{2} + 2\lambda &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{4m_1 g}{4m_1 + m_2}$$

Check limits: $m_1 >> m_2$, acceleration is g, : $m_1 << m_2$, acceleration goes to zero.

4.



FOR STABILITY, FORCE TO THE LEFT ON THE LEFT OBJECT MUST BE LESS THAN THE FORCE TO THE LEFT ON THE RIGHT OBJECT

$$\frac{GMm}{(a-r)^2} - \frac{Gm^2}{4r^2} < \frac{GMm}{(a+r)^2} + \frac{G\cancel{Mm}\,m^2}{4r^2}$$

$$\frac{M}{(a^2-r^2)^2}(a+r)^2 - \frac{M}{(a^2-r^2)^2}(a-r)^2 < \frac{m}{2r^2}$$

$$4ar\,\frac{M}{a^4} < \frac{m}{2r^2}$$

$$\frac{8Mr^3}{a^3} < m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$\frac{6}{\pi}\,\frac{M}{a^3} < \rho$$

Príklad 2

Na situaci se podíváme z inerciální vztažné soustavy spojené s formulí. V této soustavě se molekuly vzduchu pohybují rychlostí v proti formuli. Protože se jedná o elastickou srážku a protože je hmotnost formule mnohem vyšší než molekul vzduchu, můžeme předpokládat, že pro narážející molekuly platí, že je úhel odrazu roven úhlu dopadu, označme jej α. Protože se navíc molekuly pohybují po přímce rovnoběžné se stropem, můžeme tento úhel určit z tvaru formule (tedy pravoúhlého trojúhelníku) jako

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{h}{d} \doteq 11{,}3^\circ\,,$$

kde $h = 1{,}0\,\mathrm{m}$ značí výšku pravoúhlého trojúhelníku a $d = 5{,}1\,\mathrm{m}$ jeho délku.

Po srážce budou mít molekuly stejnou rychlost, ale od původního směru budou odchýleny o úhel 2α (úhel dopadu + odrazu). Pro jejich hybnost ve směru kolmém na strop tedy platí

$$p_y = mv\sin 2\alpha\,.$$

Ze zákona zachování hybnosti platí, že tato hybnost je rovna hybnosti, kterou při srážce předají v tomto směru formuli. Pro celkovou hybnost v závislosti na čase potřebujeme do vztahu výše dosadit hmotnost všech molekul, s nimiž se formule srazí za čas $\mathrm{d}t$. Uvažujme proto kvádr o stranách délky $s = 1{,}8\,\mathrm{m}$ (šířka formule), h a $v\,\mathrm{d}t$, kde $v\,\mathrm{d}t$ je rovno vzdálenosti, kterou urazí formule za čas $\mathrm{d}t$. Pro hmotnost potom platí

$$\mathrm{d}m = vsh\rho\,\mathrm{d}t\,,$$

$$\mathrm{d}m = vsh\rho\,\mathrm{d}t\,,$$

kde ρ značí hustotu vzduchu. Dosazením do vztahu pro hybnost dostaneme

$$\mathrm{d}p_y = v\sin 2\alpha\,\mathrm{d}m\,,$$

$$\mathrm{d}p_y = shv^2\rho\sin 2\alpha\,\mathrm{d}t\,.$$

Nakonec, pro vztah mezi hybností a silou působící směrem vzhůru na vozidlo platí

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\,,$$

odkud

$$F_y = shv^2 \rho \sin 2\alpha \, .$$

Tato síla musí vyrovnat tíhovou sílu Mg, která působí na formuli

$$Mg = shv^2 \rho \sin 2\alpha \, ,$$

kde M značí hmotnost formule.

Úpravou dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{Mg}{sh\rho \sin 2\alpha}} \doteq 98 \, \mathrm{m \cdot s^{-1}} \, .$$

Príklad 3

SOLUTION: For a non-interacting ideal gas,

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} N \ln \zeta \, ,$$

where ζ is the single-molecule partition function

$$\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \exp(-\beta n \varepsilon) \, .$$

This partition function can be evaluated as follows ($x \equiv \beta \varepsilon$):

$$\zeta = -e^x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\big(-(n+1)x\big) = -e^x \frac{d}{dx} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = [1 - \exp(-\beta\varepsilon)]^{-2}.$$

Hence, the sought contribution to the energy is

$$E = \frac{2N\varepsilon}{\exp(\varepsilon/kT) - 1} \, .$$

Alternatively, one can reproduce this result as follows. One can imagine that every molecule has two independent internal degrees of freedom of harmonic oscilator type, with energy spacing ε each. It is easy to see that this model gives the same spectrum and degeneracies if the energy is counted from the ground state. With this convention, the average energy of a single harmonic oscillator is $\varepsilon n_B(\varepsilon)$, where $n_B(\varepsilon)$ is the Bose-Einstein occupation number. Therefore, for the entire gas we get $E = 2N\varepsilon n_B(\varepsilon)$, in agreement with the first derivation.