Ako riesit fyzikalne ulohy

Juro Tekel juraj(dot)tekel(at)gmail(dot)com

Poznamky k prednaske o tom, ako sa vo vseobecnosti pasovat s ulohami vo fyzike.

Januar 2006 *Pocuvadlo 2006*

Táto prednáška je určená mladšiemu, resp. fyzikálne menej zdatnému publiku. Má za cieľ prezentovať prístup k riešeniu fyzikálnych úloh, ktorý zväčša vedie k zdarnému koncu. Na niekoľkých modelových úlohách sa ukáže, ako zvoliť cestu riešenia už na začiatku, ako v priebehu a aj na konci riešenia kontrolovať výsledky, ako si správne nakresliť obrázok a podobne. Požadované znalosti nie sú veľké. Poslucháči by mali mať akú takú znalosť niektorých základných pojmov, to je asi všetko. Prezentovaný prístup je značne univerzálny, takže náročnosť prednášky sa dá veľmi jednoducho nastaviť konkrétnymi úlohami.

Znalosť fyziky ako takej, princípov, vzťahov a podobne, nemusí zaručovať úspešnosť v riešení fyzikálnych úloh. Okrem toho je potrebné mať aj stratégiu, istý správny prístup k riešeniu takejto úlohy. Treba vedieť, kde, ako čo použiť, dopredu odhadnúť na čo si dávať pozor a ako by mal asi vyzerať výsledok.

Veľmi pekným príkladom na stratégiu riešenia problémov je puzzle. Normálne klasické puzzle, ktoré dostanete v obchode. Je veľmi veľa rôznych prístupov k riešeniu takýchto skladačiek. Asi najrozšírenejší, a asi aj najefektívnejším, je tento. Najskôr si usporiadame všetky kúsky obrázkom nahor. Ľahko zistíme, či ten ktorý kúsok tvorí okraj hľadaného obrázku. Väčšina ľudí si preto na úvod postaví akýsi rám. Vonkajšiu vrstvu kúskov. Potom si roztriedia ostatné kúsky tak, aby tie, ktoré vyzerajú podobne a sú teda vo výslednom obrázku blízko, boli spolu. Potom sa snažia postaviť akési malé puzzle-á a z nich potom poskladať celý obrázok. Na záver sa kde tu čosi doplní a krásny zámok je a svete. Nikto nestavia puzzle tak, že hneď kladie kúsky na správne miesto, pre istotu rovno zo stredu.

Veľmi podobne to funguje aj pri fyzikálnych úlohách. Len málo ľudí a len pri ľahkých príkladoch dokáže riešenie napísať na prvý krát, ako sa vraví "z voleja". Riešenie sa často veľmi podobá na opísaný prístup k skladaniu puzzle. Takže ako na to?

Na úvod trochu teórie. Ako asi všeobecne treba pristupovať k fyzikálnej úlohe. Majme teda nejaký fyzikálny problém. V prvom rade sa netreba hneď bezhlavo pustiť do riešenia. Na úvod sa treba na príklad **pozrieť trochu z vyššia**, prižmúriť oči a zamyslieť sa. Ako sa asi bude riešiť táto konkrétna úloha? Kde by mohli byť jej úskalia a ktorá cesta bude najschodnejšia. Niekedy sa oplatí už tu porozmýšľať o výsledku. Ako sa bude vyzerať? Od čoho bude závisieť? Ako sa bude správať pre krajné prípady? Tieto úvahy môžete urobiť aj na záver, je však oveľa lepšie mať toto na pamäti už skôr. Často pomáha napísať si, čo už na úvod viete. Čo máte zadané a z akých vzťahov vychádzate.

Takéto zahľadenie sa môžete urobiť aj viac krát. Ak sa vám nepodarí na prvý pokus na niečo prísť, zistili ste aspoň, kadiaľ cesta nevedie. Nezdá sa, ale pri riešení to dokáže veľmi pomôcť. Niekedy je dobré postupovať pri hľadaní cesty pospiatky. Ak viete, kam sa chcete dostať, možno sa vám podarí odhaliť krok predtým. A potom zas a zas až takto postupne dokráčate na začiatok. Potom sa už len zas rozbehnete vyšliapaným chodníčkom.

Ak neviete nájsť správnu cestu, **skúste si problém skonkretizovať**. Niekedy je ozaj ťažké na prvý krát vidieť riešenie nejakého ťažkého príkladu. Ak si však pod premennými predstavíte konkrétne a jednoduché, najlepšie malé, hodnoty, zrazu je riešenie jasné. A to sa už veľmi ľahko spätne zovšeobecní.

Pre ťažké úlohy často platí taktika "**rozdeľuj a panuj**". Neriešte problém ako celok. Pokúste sa ho rozdeliť na viac menších, ľahších úloh, ktorých riešenie by vám pomohlo. Neriešte však tieto úlohy hneď. Nájdite si najskôr cestu, o ktorej viete, že povedie k cieľu. Až potom riešte jednotlivé úlohy.

Často pomôže nakresliť si akýsi **plán boja**. Mapku terénu. Schému, ako pri riešení problému postupovať, kde sú nástrahy a dôležité miesta. A ak nájdete viac ako jednu schodnú cestu, zvoľte tú, ktorá má najmenej úskalí. Najmenej miest, na ktorých sa dá ľahko pomýliť alebo zablúdiť.

Teraz, keď už máme pred očami cestu, ktorou sa bude uberať naše riešenie, môžeme si vyhrnúť rukávy a pustiť sa do toho. Avšak nie bezhlavo. Aj tu pomôže pridŕžať sa niekoľkých zásad.

Ak ste si ešte nenakreslili **obrázok**, teraz je tá správna chvíľa. Často to však pomôže už oveľa skôr, keď sa ešte len rozhodujeme, ako riešiť úlohu. Obrázok je veľmi dôležitý. Mal by byť prehľadný. Dôležité veci môžu byť prehnane veľké, menej dôležité naopak. Do obrázku si zakreslite všetky veličiny, ktoré sú dôležité. Nezabudnite na sily a malé posunutia. Neváhajte obrázok prekresliť, ak je neprehľadný. Kľudne aj dva krát väčší. V kreslení náčrtkov k úlohám si treba vytvoriť cvik, aby ste zistili ako je vám lepšie. Máte radšej pohybujúce sa telesá do ľava alebo do prava? Ktorým smerom máte radšej kladnú časť osy? A podobne. Zdá sa to hlúposť a výsledok od toho vôbec nezáleží. Práve preto si môžte zvoliť takéto veci tak, ako sa vám páči.

V prvom rade vždy majte na pamäti svoju stratégiu. Buďte však pripravený kedykoľvek ju podľa potreby zmeniť. Ak zistíte, že niečo pôjde ľahšie ako ste myseli alebo naopak. Určite nepočítajte so "zavretými očami".

Voľte **symboly** pre premenné tak, aby bolo jasné čo je čo. Na to sú najlepšie indexy, veľké malé písmená a tak. Dávajte si pozor, aby ste sa pri zložitejších zápisoch nezamotali. Neoznačujte premenné písmenami, ktoré píšete podobne!!! Pri riešení píšte konštanty na úvod vzťahu, potom zadané premenné a až na záver hľadané premnenné. Veci, ktoré spolu súvisia píšte k sebe. Netrhajte dobre známe výrazy. Takto sa budete vo vašich výpočtoch oveľa lepšie orientovať, ľahšie prídete na chybu alebo na iný problém.

Vraví sa, že inteligent sa vyzná aj v **neporiadku. Ale odtiaľ potiaľ.** Riešenia do špirály a podobné veci sú síce efektné, ale pramálo efektívne. V priebežných výpočtoch neporiadok nevadí, ale dôležité postupy a výsledné vzťahy je vždy dobré písať pekne na iné miesto. Opäť to pomáha v orientácií, ľahšie sa hľadajú chyby a vracia sa o krok späť, keď nemusíte hľadať jeden vzorec po celom zošite. Riešenie príkladu nie je vaša decká izba. V ňom by ste mali mať poriadok.

Ak sa zrazu prichytíte pri tom, ako riešite niečo neskutočne ťažké a divné, s hlúpymi koeficientmi a tak, asi ste sa niekde stratili. Príroda nie je tak úchylná, ako sa zdá na prvý pohľad a mnohé veci vychádzajú v jednoduchých tvaroch. Ak vám niekde vyskočilo niečo ozaj škaredé, skontrolujte si pre istotu ako ste sa k tomu dostali, či tam nie je niekde chyba. NEMUSÍ, ale asi bude.

Podľa mňa najdôležitejšou činnosťou pri riešení úloh je **neustála sebareflexia**. Teda stále overovanie správnosti toho, čo máme pred sebou práve napísane. Nemyslím tým kontrolovanie so zadnou stranou knihy alebo niečo podobné. Na dôležitých miestach zastavte a pozrite sa na výsledok. Môže to tak byť? V prvom rade je dobré, ak viete, ako by výsledný vzťah asi mal vyzerať. A potom je tu niekoľko ďalších metód, ako odhaliť chybičku. Nejde tu však len o to. Počas neustálej kontroly sa zoznamujete s problémom a s jeho podstatou, možno prídete na niečo, čo vám predtým ušlo a podobne.

Najjednoduchšia a najefektivnejšia je **rozmerová analýza**. Ak hladáte tlak, to je jedno či ako definitívny výsledok, alebo čiastkový vzťah, a váš výsledok je v kelvinoch za sekundu asi niečo nie je v poriadku. Tak isto musíte vždy umocňovať bezrozmerným číslom a logaritmovať bezrozmerné číslo. Dosaďte jednotky a uvidíte, či výraz môže byť skutočným výsledkom[1].

Niekedy, najmä pri dôležitejších výsledkoch je dobré zistiť, či výsledok aspoň **rádovo sedí** s tým

[1] Samozrejme nemusí byť, aj keď rozmerová analýza dopadne dobre.

,čo by ste očakávali. Hmotnosť veveričky v tonách jemne naznačuje možnú chybu. Tak isto overte **znamienko výsledku**. Záporné hmotnosti, časy, či teploty pod absolútnou nulou sú veľmo podozrivé.

Je váš výsledok **matematicky v poriadku**? Vedie niekedy na delenie nulou, logaritmovanie alebo odmocňovanie záporného čísla? Ak áno, nemusí to hneď byť zle. Daná situácia môže byť nefyzikálna, inak povedané sice matematický vzorec ju pripúšťa, ale fyzika nepustí. Ak však zistíte, že rýchlosť pohybu molekúl je pri istej teplote nedefinovaná, možno ste predsa len niekde niečo poplietli.

Dobré si je všimnúť, **ako sa mení výsledok pri zmene parametrov**. Myslíte si, že je správne, ak sa vám s rastúcou počiatočnou rýchlosťou výška vrhu zmenšuje? Tu je dobré rozumieť problému a vedieť, čo od výsledku očakávať. S čím bude rásť, s čím bude klesať. Od čoho nebude vôbec závisieť. Niektoré chyby sa takto odhalia ľahko, niektoré ťažšie.

Overte tiež **hraničné a iné špeciálne prípady**. Ako sa výsledok správa pre veľmi malé alebo veľmi veľké hodnoty? Má maximá tam, kde by ich mal mať? Správne môže byť len výsledok, ktorý vám pre nulový elevačný uhol dá nulový dolet. Tak isto pre uhol 90°.

Skúste si všimnúť, akú **symetriu** by mal mať váš výsledok. Ak vymením guličku jedna za guličku dva, nemalo by sa to prejaviť. Niektoré veličiny by mali do vzorcov vstupovať rovnako ako niektoré iné, ak hrajú tú istú úlohu.

Keď nájdete chybu, podľa jej charakteru a miesta sa dá zistiť, kde asi mohla byť spravená. Potom sa oveľa lepšie hľadá. Tak isto keď raz viete, že na istom mieste pri riešení bolo všetko v poriadku, chyba nastala asi niekedy potom. Takto sa dá chyba veľmi ľahko vystopovať a opraviť.

Tak, nabúšení sme teóriou až po uši. Skúsme sa na to teraz pozrieť trochu prakticky. Budeme riešiť niekoľko jednoduchých úloh. Jednu úplne celú, aj s chybami. Potom budeme hľadať už len stratégiu riešenia, bez samotného riešenia. Na záver budeme zas iba hľadať chyby v navrhnutom riešení úlohy. Držte si klobouky.

Vypočítajte, do akej vzdialenosti doletí teleso, vrhnuté v gravitačnom poli rýchlosťou v pod uhlom α. Do akej maximálnej výšky sa dostane?

Táto úloha je veľmi jednoduchá a mnohý si iste pamätáte výsledok, ale na úvod je to dobré. Je to problém, ktorého cesta riešenia je zjavná už na začiatku. Ale aj tak si treba veci dobre premyslieť.

Ako by sa dala riešiť úloha? Zvolíme sústavu súradníc, napíšeme si rovnice pre súradnice a vypočítame čo potrebujeme. Nie je dobré do riešenia sa pustiť už tu! Ako to vypočítame? Budme mať rovnice pre x a y v čase. Rovnice prerobíme na závislosť y na x. Nájdeme, kedy sa $y = 0$. To je evidentne miesto, kam dopadlo teleso. Očakávame, že takéto body budú dva. Začiatok a koniec vrhu. Vieme, že presne medzi nimi bude teleso najvyššie. Tak, teraz je to už celé viac menej jasné, môžeme sa vrhnúť do počítania.

Zvoľme vodorovnú x-ovú os, zvyslú y-ovú os a teleso nech sa na začiatku nachádza počiatku sústavy. Rovnice pre súradnice v čase budú mať tvar

$$\begin{aligned} x(t) &= tv\cos\alpha \\ y(t) &= tv\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Je lepšie zapísať to takto ako $x(t) = v\cos\alpha t$, pretože to by mohlo zvádzať na kosínusovanie aj toho času. A je dobré mať rýchlosť a kosínus pri sebe. To je prvý krok. Teraz vyjadriť y od x. Z prvej rovnice $\frac{x}{v\cos\alpha} = t$ a teda

$$y(x) = x\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v^2\cos^2\alpha}$$

Je to parabola, má dva nulové body. Presne čo sme čakali. Takže podľa plánu hľadáme, kedy $y = 0$

$$0 = x\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v^2\cos^2\alpha}$$

Kvadratická rovnica, má dve riešenia

$$\begin{aligned}
x_{1;2} &= \frac{-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - 4\cdot 0\cdot \frac{1}{2}g\frac{1}{v^2\cos^2\alpha}}}{g\frac{1}{v^2\cos^2\alpha}} \\
x_1 &= 0 \\
x_2 &= \frac{-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{g\frac{1}{v^2\cos^2\alpha}} = -\frac{2v^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} = -\frac{v^2\sin 2\alpha}{g}
\end{aligned}$$

Teraz by sme sa mali pozrieť na to ako to bude s tou výškou. Ale zastavme sa, a overme si výsledok, ku ktorému sme došli. Nechceme presa vychádzať z niečoho zlého, ak sme sa náhodou pomýlili. Takže postupe. Rozmerová analýza. Sedí, výsledok je v metroch. Jedna hodnota nulová, tj. moment, keď sme teleso vrhli. Super. Čo však ti druhé? Pre uhly do $90°$ vrháme dopredu[2] dostávame zápornú vzdialenosť. Teleso doletí za nás, napriek tomu že sme ho hodili pred nás. To asi nie je v poriadku. Sami si overte, že všetko ostatné pre tento vzťah sedí. Až na to znamienko. Tak hybaj hľadať chybu.

Chyba je v znamienku. Overme si teda, či sme nespravili iba hlúpu chybu pri riešení kvadratickej rovnice. Keď sa tak na to bystrím okom pozrieme, zistíme, že sme zabudli mínusko pred koeficientom pri kvadratickom člene. Riešenie teda malo vyzerať

$$\begin{aligned}
x_{1;2} &= \frac{-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 4\cdot 0\cdot \frac{1}{2}g\frac{1}{v^2\cos^2\alpha}}}{-g\frac{1}{v^2\cos^2\alpha}} \\
x_1 &= 0 \\
x_2 &= \frac{-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{-g\frac{1}{v^2\cos^2\alpha}} = \frac{2v^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}
\end{aligned}$$

A zrazu je všetko ako má. S dobrým pocitom, že nám vychádza všetko ako chceme pokračujeme ďalej. Čo sme to vlastne chceli? Maximálna výška. Môžeme teraz dopočítať y-ovú súradnicu bodu v polovici maximálnej dĺžky. Dopočítame

$$\begin{aligned}
\frac{x_{\max}}{2} &= \frac{2v^2\cos\alpha\sin\alpha}{2g} \\
y_{\max} &= \frac{v^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\frac{\frac{v^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{g^2}}{v^2\cos^2\alpha} = \\
&= \frac{v^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{1}{2}\frac{v^2\sin^2\alpha}{g} = \frac{1}{2}\frac{v^2\sin^2\alpha}{g}
\end{aligned}$$

Ľahko sa presvedčíme, že tento výsledok spĺňa všetko, čo by sme od neho očakávali. Je vždy kladný, pre uhly $0°$ a $180°$ je nulový a maximum má pre uhol $90°$. Čo viac sme si mohli želať.

[2] Tak sme si zvolili súradnice.

V ďalších úlohách už len sformulujeme stratégiu, akou by sme sa pri riešení riadili, nakreslíme si obrázok a skúsime odhadnúť tvar a vlastnosti riešenia. Toto je dosť problematické a netreba si s tým robiť až takú ťažkú hlavu. Nie je dôležité riešenie takto uhádnuť, skôr je dôležité nájsť chybu v prípadnom zlom riešení. Všetko odporúčam najskôr urobiť samostatne a až potom porovnať s tým, čo je tu uvedené. V čom je váš prístup lepší, horší? V čom vám ktorý viac vyhovuje?

Majme štvorcoví rámik hmotnosti M, zavesený za stred jednej hrany. Na jeden z dolných vrcholov[3] pridávame závažia. K akému maximálnemu uhlu $\alpha_{\max}$ sa bude blížiť vychýlenie osi štvorca od zvislice pri neustálom zväčšovaní záťaže? Pre akú hmotnosť závažia bude táto výchylka $\alpha_{\max}/2$?
Riešenie. Táto úloha nie je jednoduchá. Teda nie na prvý pohľad. Zahľaďme sa na príklad zvrchu, ako radí návod. Vidíme, že ide o príklad zo statiky. Nepýtame sa nič na to, ako sa bude pohybovať rámik. Len kde sa ustáli. To je super. Ak identifikujeme druh príkladu, oveľa ľahšie sa nám Vieme totiž, že v takých príkladoch vystačíme s rovnováhou momentov síl. Super. Bez toho, aby sme čokoľvek poriešili sme našli pravdepodobne schodnú cestu. Čo ďalej? Aké sily pôsobia na rámik? Tiažová a tá, ktorou pôsobíme v rohu rámika. Načrtnime si obrázok.

ob1

Ako sme už povedali, tieto dve sily musia mať v rovnováhe celkový moment nulový. Vidíme, že rámik sa chce otáčať okolo bodu závesu. Budeme preto počítať moment síl vzhľadom na tento bod. Z nulovosti celkového momentu už dostaneme vzťah medzi hmotnosťou závažia a uhlom, o ktorý sa rámik vychýli. Ľahko vymyslíme, ako sa bude správať opačný vzťah, tj. $\alpha(m)$. *Pre nulovú hmotnosť by mal byť uhol nulový. Samozrejme, že keď nič nezavesím, nič s nám nevychýli. Ďalej by sa pri rastúcom* m *mal tento uhol zväčšovať. A to vždy, pre väčšie* m *dostaneme vždy väčšie* α. *Ale ak by sa bod, na ktorý vešiame závažia dostal na ľavo od zvislice, na sústavu by pôsobil nenulový moment sily. Ale to je v rozpore so statickým charakterom úlohy a takéto riešenia by náš vzorec nemal povoľovať. Preto čakáme, že pre veľmi veľké* m *sa bude výsledok približovať k hodnote* $\arctan\frac{1}{2}$. *To je aj odpoveď a prvú otázku. A tú druhú ľahko nájdeme zo spomínaného vzťahu.*

Vo vode plávajú dve guličky spojené lankom. Jedna polomeru R z materiálu s hustotu ρ_1 a druhá polomeru r. Prvá gulička pláva do polovice ponorená. Druhá na nej visí. Určite silu, ktorou je napínané lano a hustotu druhej guličky.
Riešenie. Opäť sa pozrieme na príklad vidíme, že ide o statiku. Nič sa nám dokonca nechce otáčať, pôjde teda o jednoduchú rovnováhu síl. Nakreslime si preto obrázok a do neho pôsobiace sily. Na každú guličku patričná tiažová a vztlaková a na obe rovnaká ťahová sila lana.

ob2

Vieme, že obe gule sú v pokoji, teda výslednice síl pôsobiacich na každú guľu musia byť nulové. Poznáme tiaž aj rozmery prvej gule, ľahko teda určíme ťah lana. Potom zas ľahko určíme tiaž a tým aj hustotu druhej gule.

Tu vstupuje do hry veľmi veľa parametrov, takže nebude až také ľahké zistiť charakter riešenia. Povedzme len, že s rastúcou hustotu prvej gule bude klesať ťah lana, až pri polovičnej hustote ako je

[3]tj. takých, ktorý neleží na hrane, za ktorú je štvorec zavesený.

hustota vody by mal byť nulový. Pretože vztlak ledva ledva udrží guľu, nie to aby ho ešte niečo ťahalo nadol. Pri druhej guli zas naopak. Väčšia hustota, väčší ťah, lebo čím je ťažšia táto gulička, tým viac treba pomáhať tiaži. Takže s rastúcou hustotu ρ_1 by mala klesať hustota druhej gule. A môžeme riešiť.

Po nevodivom kruhu s polomerom R umiestnenom vertikálne v gravitačnom poli Zeme sa môžu voľne pohybovať dve korálky s hmotnosťou m. Akým nábojom (obe korálky rovnakým) treba tieto korálky nabiť, aby ich spojnice so stredom kruhu zvierali uhol α?

Riešenie. Opäť statika. Takže pôjde o rovnosť síl. Nakreslíme si krásny obrázok

ob3

Na guličky pôsobí tiažová sila a odpudivá elektrická sila. Vidíme, že si potrebujeme rozložiť sily do nejakých dvoch smerov. Do ktorých?. Do smeru kolmého na obruč, táto zložka sa vynuluje obručou[4]*. Druhý smer môžeme voliť viac menej ako potrebujeme. Natíska sa smer dotyčnice k obruči a zvislí smer. Skúste si, že oba vedú k tomu istému výsledku. Tak dostaneme vzťah medzi spomínanými dvoma silami. Elektrickú odpudivú vypočítame z Coulombovho zákona, kde si ešte budeme musieť vyjadriť vzdialenosť, a dostaneme rovnicu pre veľkosť náboja. Očakávame, že výsledok bude úmerný uhlu. Pre nulový uhol dostaneme nulový náboj. Pre uhol* $180°$ *nekonečne veľký náboj. Pre väčšie uhly by sme mali dostať nejakú matematickú hlúposť, lebo to nejde spraviť. Čím ťažšia korálka, tým je potrebný väčší náboj, tak isto ako pri veľkej obruči.*

Kačka letela po vodorovnej priamke rýchlosťou u. Pytliak do nej hodil kameň rýchlosťou v pod uhlom α. Bol to neskúsený pytliak, takže kameň hodil bez nábehu t.j. v smere okamžitej polohy kačky. Ale bol to zároveň pytliak, ktorý mal šťastie, takže kačku predsa len zasiahol. V akej výške letela kačka?

Riešenie. Je ťažké si predstaviť, čo mal asi básnik na mysli touto úlohou, a tak si to radšej celé nakreslime.

ob4.1

A hneď sme múdrejší. Vidíme hneď metódu hrubá sila víťazí. Napíšeme si rovnice pre súradnice kačky, súradnice strely a hľadáme, kedy sa bude kačka a strela nachádzať na tom istom mieste. Dostaneme vlastne sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych[5]*, pričom jedna rovnica bude kvadratická. To by sme už mali ľahko doriešiť. Skúsme ale nájsť inú metódu. Prevtelme sa do náboja. Ako sa v sústave náboja bude pohybovať kačka? Bez dlhých rečí si nakreslime obrázok.*

ob4.2

Napíšeme si rovnice pre súradnice kačky v takejto sústave a hľadáme podmienky, pri akej budú obe v rovnakom čase nulové. Pri tejto úlohe je trochu ťažšie prísť na tvar riešenia.

[4]Tu sme sa dopustili nepresnosti. Na teliesko totiž pôsobí ešte tretia sila a to reakcia obruče. Tá má rovnakú veľkosť ako výsledná sila v smere kolmom na obruč a opačnú orientáciu, takže sa s touto zložkou vyhubí.

[5]Čas a výška letu kačky, pretože počiatočná x-ová súradnica sa pomocou výšku dá vyjadriť.

Z výšky H púšťame malú guličku. V akej výške jej do cesty máme položiť naklonenú plôšku zo sklonom $45°$, aby sa odrazila do vzdialenosti nH od miesta, kam by inak dopadla?

Riešenie. Tu identifikujeme nosnú myšlienku aj bez obrázku. Naklonená rovina s uhlom sklonu $45°$ spraví to, že vodorovnú a zvyslú zložku jednoducho zamení[6]*. Takže gulička bude padať voľným pádom. Odrazí sa, čím bude vlastne vodorovne vrhnutá. Buď si všetky potrebné vzorce pamätáme, alebo si nakreslíme obrázok.*

ob5

Zo zákona zachovania energie dostaneme rýchlosť vrhu, rozložením vrhu na voľná pád a rovnomerný pohyb v pravo dostaneme očakávanú vzdialenosť. Tú položíme rovnú nH a dostaneme rovnicu pre h. Opäť je ťažké natypovať tvar výsledku. Môžeme povedať asi toľko, že by mala mať úloha dve riešenia. Jedno, keď bude plôška položená vysoko, vtedy síce získa malú rýchlosť v x-ovom smere, ale za to bude dlho padať, alebo naopak. Pre $n = 0$ by sme mali dostať riešenia H a 0. Tiež očakávame pre nejaké n iba jedno riešenie a pre n väčšie ako toto riešenie sme už bez riešenia.

Majme dve rovnaké polopriepustné zrkadlá. Každé prepustí $\frac{1}{2}$ dopadajúceho svetla a zvyšok odrazí. Aká časť svetla prejde sústavou oboch týchto zrkadiel?

Riešenie. Najskôr si nakreslíme ako obrázok dve zvislé čiary. Z jednej strany na takúto sústavu necháme dopadať lúč svetla. Polovica prejde prvým zrkadlom a druhá sa nenávratne odrazí. Polovica ktorá prešla dopadne na druhé zrkadlo. Polovica z polovice prejde a prepustená. Polovica z polovice sa odrazí spať K prvému zrkadlu. Polovica z polovice z polovice ... Postupne dostaneme takýto obrázok

ob6

Pokúsime sa nájsť nejaký vzor v tvare intenzity prejdených a odrazených lúčov a nájdeme ich celkový súčet. Pôjde zrejme o nekonečný súčet, pretože lúče sa budú medzi zrkadlami odrážať teoreticky do nekonečna. Ako skúška správnosti poslúži overenie, či definitívne prejdené a definitívne odrazené lúče dajú dokopy pôvodný lúč. Nikde by sa nám totiž nič nemalo strácať.

Na záver sa precvičíme v odhaľovaní chýb. Predpokladajte, že zadanú úlohu sme už zdarne vyriešili a prišli sme k uvedenému riešeniu. Môže toto riešenie byť správne? Prečo, a kde sa asi stala chyba ak sa stala? Opäť odporúčam najskôr skúsiť samostatne.

Pohyblivé schody prenesú stojaceho pasažiera z jedného podlažia na druhé za čas t_1. Ak pohyblivé schody stoja, prejde po nich pasažier z jedného podlažia na druhé za čas t_2. Za akú dobu prejde pasažier (ak kráča) po pohybujúcich sa schodoch z jedného podlažia na druhé (pasažier ide v smere pohybujúcich sa schodov)?

Navrhovaný výsledok $T_1 = 1/\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right), T_2 = 1/\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)$

Riešenie. *Oba vzťahy sedia rozmerovo. Avšak očakávame, že čím rýchlejšie vybehnem po schodoch bez ich pohybu, tým rýchlejšie sa tam dostaneme aj s ich pohybom. Tak isto naopak. Vzorec by mal byť teda rastúci pre oba časy. Prvý taký je, pretože keď delíme v menovateli väčším číslom, dostaneme*

[6] Ak nie je jasné, odporúčam premyslieť.

menšie, a tým keď delíme dostaneme väčšie. Druhý však v čase t_2 túto vlastnosť nemá. Asi niekde ušlo znamienko.

V nádobe s objemom V sa nachádza hmotnosť m dusíka a rovnaké množstvo kyslíka. Aký je tam pri teplote T tlak?

Navrhovaný výsledok $p_1 = \frac{mN_A}{kTV}\left(\frac{1}{M_{N_2}} + \frac{1}{M_{O_2}}\right), p_2 = \frac{m_{N2}m_{O_2}N_AV}{mkT}\left(\frac{1}{M_{N_2}} + \frac{1}{M_{O_2}}\right)$, kde m_{N2} je hmotnosť jednej molekuly N_2, m_{O_2} analogicky

Riešenie. Prvý výsledok nie je určite správny, lebo nesedí rozmerovo. Niekde sa asi niečo zle prehodilo na druhú stranu rovnice. Druhý rozmerovo sedí, ale nepáči sa nám to, že s rastúcou hmotnosťou plynov, klesá tlak. To určite nie je správne, lebo čím viac dáme do nádoby plynu, tým tam bude väčší tlak. Opäť asi chyba v uprovaní. Viac by sa dalo zistiť, keby sa molekulové hmotnosti vyjadrili pomocou N_A a molových hmotností.

Aká najväčšia časť homogénnej retiazky môže prevísať cez stôl, aby sa nezošmykla? Koeficient trenia medzi retiazkou a stolom je f.

Navrhovaný výsledok $x_1 = \frac{f}{1+f}\frac{1}{l}, x_2 = \frac{f}{1+f}l, x_3 = \frac{1}{1+f}l$

Riešenie. Prvý výsledok zas nesedí rozmerovo. Zvyšné dva áno. Čo teda od výsledku očakávame. Pre nulové f by mal dať nulovú prevísajúcu časť, pretože retiazka by sa okamžite zošmykla. To ale spĺňa iba druhý výsledok. Všimnime si, že pre $f \to \infty$ dostávame $x \to l$, čo je tiež presne to, čo čakáme. Pretože pri veľkom trení postačí už malá časť v kontakte zo stolom, a retiazku to udrží.

Aký najkratší tieň vrhá tyč výšky h v Liptovskom Mikuláši (zemepisná šírka ϕ)? Odklonenie zemskej osi je α.

Navrhovaný výsledok $d_1 = l\tan(\phi - \alpha), d_2 = l\tan(\alpha - \phi)$

Riešenie. Vieme, že keď sa budeme nachádzať na obratníku, tj. $\phi = \alpha$, najkratší tieň bude nulový. To spĺňajú oba výsledky. Pre väčšie ϕ by sme mali dostať väčšiu výšku, lebo vieme, že severnejšie je slnko najvyššie nad obzorom počas roku nižšie. Preto môže byť správny iba prvý výsledok. Samozrejme nič také ako zápornú dĺžku tieňa nepoznáme, preto by tam mal byť asi absolútna hodnota. A pre $|\phi| < \alpha$ by sme vždy mali dostať nulovú dĺžku. Posledné chyby sú len viac menej formálne úpravy výsledného vzorca, na ktoré sme zabudli Pri prvej nám asi ušlo znamienko.

Lopta letí vo vzduchu šikmým vrhom čas t. Do akej maximálnej výšky sa dostala?

Navrhovaný výsledok $h_1 = \frac{gt}{8}, h_2 = \frac{gt^2}{8}$

Riešenie. Prvý výsledok jasne nesedí rozmerovo. Asi sme použili nejaký vzorec v zlom tvare. Druhý áno. Nič iné mu nemôžme vytknúť.

Nehmotná kladka je zavesená cez nitku na dve pružinky rôznej tuhosti k_1 a k_2. O akú dĺžku sa posunie kladka, ak na ňu budeme pôsobiť silou F?

Navrhovaný výsledok $x_1 = F\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}, x_2 = F\frac{k_1+k_2}{4k_1k_2}, x_3 = F\frac{k_1-k_2}{k_1k_2}$

Riešenie. Očakávame symetriu riešenia pre pružinky. Je jedno, či sa na to pozerám spredu alebo zozadu. Takže trete riešenie zahadzujeme. Prvé dve riešenia nevieme bez hlbšej analýzy problému posúdiť. Pri chybe sme asi niekde započítali nejakú silu opačným smerom. Prípadne nám znamienko ušlo inde. To sa ľahko vystopuje.

V kvapaline hustoty ρ_0 pláva kužeľ hustoty ρ. Aká časť jeho výšky vyčnieva nad hladinu?

Navrhovaný výsledok $p_1 = \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}}, p_2 = \sqrt[3]{1 - \frac{\rho}{\rho_0}}, p_3 = \sqrt{1 - \frac{\rho_0}{\rho}}, p_4 = \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_0}{\rho}}, p_5 = \sqrt{1 + \frac{\rho}{\rho_0}}, p_6 = \sqrt[3]{1 + \frac{\rho}{\rho_0}}, p_7 = \sqrt{1 + \frac{\rho_0}{\rho}}, p_8 = \sqrt[3]{1 + \frac{\rho_0}{\rho}}$

Riešenie. Rozmerovo sedia všetky výsledky. Avšak kužeľ bude plávať iba pre $\rho < \rho_0$. *Riešenia so zlomkom* $\frac{\rho_0}{\rho}$ *však v takomto prípade nedávajú riešenie a sú teda nesprávne. Riešenia z pluskom zas dávajú riešenie aj pre situáciu, keď kužeľ nepláva, tj.* $\rho > \rho_0$. *Takže správne môže byť iba jedno z prvej dvojice riešení. Tu by sme ale opäť potrebovali nazrieť lepšie na problém, čo nechceme.*

Akú najdlhšiu tyč môžeme zašprajcovať medzi dve steny, ktorých vzdialenosť je d? Koeficient trenia medzi tyčou a stenou je f.

Navrhovaný výsledok $l_1 = d\sqrt{f^2+1}, l_2 = d\sqrt{f^2-1}, l_2 = d\sqrt{1-f^2}$

Riešenie. Výsledok by sme mali dostať pre ľubovoľnú hodnotu trenia. Tomuto testu odolalo iba prvé riešenie.