Siete jednosmerného prúdu
alebo
79 odporných príkladov

Juraj Tekel
Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky — juraj(a)tekel(b)gmail(c)com
FMFI UK — http://fks.sk/~juro/phys_materials.html
Mlynska Dolina
842 48 Bratislava
Celožnice 2009, Letná Škola FKS 2013, Letná Škola FKS 2014
Aktualizované 14. júla 2014

Poznámky k semináru o tom, ako sa vysporiadať s príkladmi o jednosmernom prúde, ako vypočítať viac či menej zložité siete a veľa príkladov na precvičenie.

Obsah

---

1 Úvod

Tento text stručne zhŕňa problematiku elektrických sieti jednosmerného prúdu v stredoškolskom rozsahu. Okrem stručných poznámok a zhrnutia užitočných vzťahov pre každú z častí ponuka veľké množstvo príkladov na precvičenie. Mnohé príklady sú doplnene návodom k riešeniu, kompletným riešením alebo výsledkom. Ako je zvykom, je viac ako odporúčané nad príkladom porozmýšľať a potrápiť sa s ním pred tým, ako si skúsime pomôcť návodom alebo riešením.

Príklady sú zoradene do niekoľkých tematických časti, pričom veľmi často treba na vyriešenie príkladu znalosti zo skoršej časti, veľmi zriedka naopak. V rámci časti sú príklady zoradenie podľa náročnosti a vyriešenie úvodných príkladov môže pomôcť k vyriešeniu príkladov z konca časti.

Zdroje príkladov ako aj odporúčané čítanie k tejto problematike je uvedené na zaver textu. Príklady pochádzajú zväčša zo zbierok FKS, FX, Náboja FKS, semináru Fykos a úloh Fyzikálnej Olympiády, autorom ktorých patri veľká vďaka.

2 Kombinácie sériového a paralelného zapojenia

- dva odpory s odpormi R_1 a R_2 zapojene za sebou sa dajú nahradiť jedným odporom veľkosti $R = R_1 + R_2$

  dva odpory s odpormi R_1 a R_2 zapojene vedľa seba sa dajú nahradiť jedným odporom veľkosti $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$
- to znamená, že medzi svorkami nahradeného odporu bude v oboch prípadoch pri rovnakom napätí pretekať rovnaký prúd ako v prípade pôvodného zapojenia
- je užitočne pamätať si, že dva rovnaké odpory zapojené paralelne dávajú odpor, ktorý je polovičný
- obe tieto tvrdenie sa dajú odvodiť s Ohmovho zákona pripadne Kirchhofovych zákonov a neskôr si ich aj odvodíme

Príklad 1. Ak dva odpory zapojíme sériovo, dostaneme odpor $9\,\Omega$, ak paralelne dostaneme odpor $2\,\Omega$. Aké sú tieto odpory?

Výsledok. $6\,\Omega$ a $3\,\Omega$

Príklad 2. Ak každé dva odpory z trojice odporov zapojíme paralelne, dostaneme postupne zapojenie s odporom $30\,\Omega$, $40\,\Omega$, $60\,\Omega$. Aký odpor dostaneme keď zapojíme všetky tri odpory paralelne?

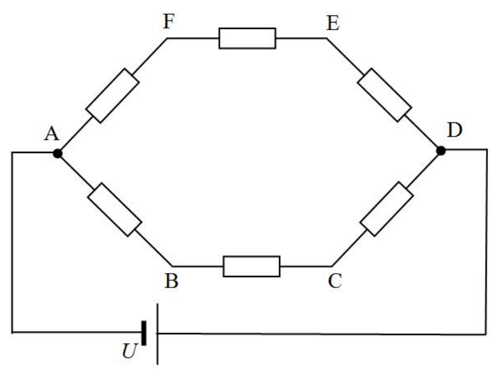
Návod. Dobre si napísať rovnice, ktoré z toho vyplývajú a iba s nimi dostatočne zažonglovať.

Výsledok. $\frac{80}{3}\Omega = 26,667\,\Omega$

Príklad 3. Z drôtu postavíme domček. Aký je odpor takéhoto zapojenia medzi vrcholmi 'pri zemi'? A aký je odpor medzi vrcholmi 'pod strechou'? Odpor jednej hrany je R.

Výsledok. $\frac{8}{11}R$ a $\frac{8}{11}R$

Príklad 4. Do elektrického obvodu sme zaradili šesť rezistorov s odpormi R. Sústava rezistorov tvorí šesťuholník ako na obrázku.

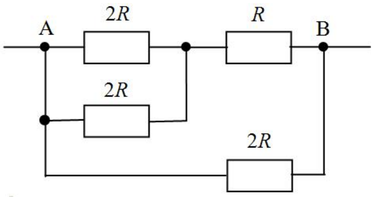


a. Určte výsledný odpor sústavy rezistorov medzi bodmi A a D?

b. Medzi body A a D pripojíme ďalší rezistor s odporom R. Aký bude výsledný odpor sústavy medzi bodmi A a D v tomto prípade?

c. Do obvodu pripojíme ešte ďalšie dva rezistory s odporom R, a to jeden medzi body A, C a druhy medzi body A, E. Aký bude výsledný odpor sústavy rezistorov medzi bodmi A a D v tomto prípade?

Príklad 5. Rezistory s odpormi R a $2R$ sú zapojene podľa schémy na obrázku. Určte výsledný odpor medzi koncovými bodmi A a B.

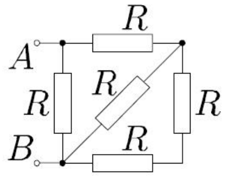


Návod. Keďže majú vodiče nulový odpor, môžeme miesta spojenia vodičov ľubovoľne premiestňovať, pokiaľ nepreskočíme nejaký odpor. Takto sa da schéma zjednodušiť.

Riešenie. Podlá pravidla o dvoch rovnakých odporoch môžeme nahradiť dva paralelne zapojene odpory $2R$ pri bode A odporom R, a dostávame paralelne zapojenie dvoch odporov $2R$, ktoré ma podľa toho istého pravidla odpor R.

Je doležíte si uvedomiť, že vďaka nekonečnej vodivosti (=nulovému odporu) ktorý sa vo všetkých úlohách mlčky predpokladá, môžeme všetky tri vrcholy na ľavej strane zapojenie (bod A a dva vrcholy pod nim) spojiť do jedného, kde už paralelnosť zapojenia odporov $2R$ bije do oči.

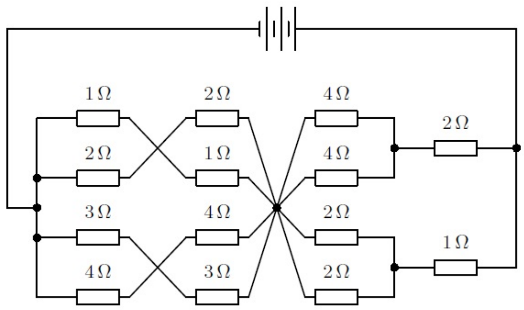
Príklad 6. Nájdite odpor nasledujúceho zapojenia.



Návod. Jedna sa len o sériovo a paralelne zapojene odpory, schému si treba vhodne prekresliť.

Výsledok. $5R/8$

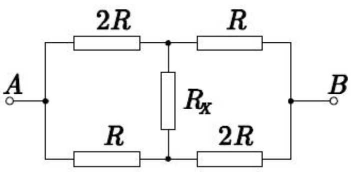
Príklad 7. Aký je výsledný odpor tohto zapojenia? (V miestach, kde sa vodiče pretínajú bez bodky nie sú vodivo spojene.)



Návod. Jedna sa len o sériovo a paralelne zapojene odpory, schému si treba vhodne prekresliť.

Výsledok. $172/75\,\Omega$

Príklad 8. Do schémy na obrázku vkladáme na miesto odporu R_X odpory s rôznou hodnotou a meriame celkový odpor medzi bodmi A a B. V akom rozsahu ich nameriame. Aká bude minimálna a maximálna takto dosiahnutá hodnota?



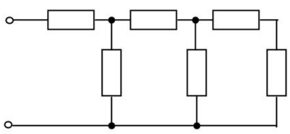
Výsledok. $\frac{4}{3}R, \frac{3}{2}R$

Príklad 9. Na hranách štvorca sú umiestnené odpory, tri s odporom R a jeden s odporom R'. Vymyslite spôsob, ako na čo najmenej meraní ohmmetrom zistiť, ktorá hrana ma odpor R' a aká je numerická hodnota tohto odporu ak vieme, aká je hodnota odporu R.

Návod. Očividne to sa to da na tri merania, kde zmeriame odpor na každej hrane. Vieme to ale aj jednoduchšie?

Riešenie. Je doležíte si uvedomiť, že ak meriame odpor na uhlopriečke, vždy nameriame tu istú hodnotu $R_u = \frac{2R(R+R')}{3R+R'}$. To nám pomôže pri hľadaní numerickej hodnoty odporu R'. Avšak preto nám meranie na uhlopriečke nepomôže pri pátraní po polohe odporu R'. Odpor R' vieme nájsť na tri merania. Odmeriame odpor na troch hranách štvorca. Ak majú všetky tri rovnaký odpor, hľadaný odpor je na zvislej hrane, ak mali dve rovnaký a jedna iný odpor, tato iná hrana ma odpor R'. Na menej ako tri merania sa to nedá, nakoľko keď odmeriame ľubovoľne dve hrany, vždy môžeme vymeniť odpory na dvoch hranách (tých ktoré sme nemerali) bez toho, aby sme zmenili predchádzajúce výsledky.

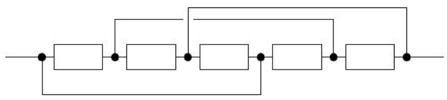
Príklad 10. Je odpor nasledujúcej schémy väčší alebo menší ako odpor jedného rezistoru R? Môžeme dosiahnuť odpor menší ako R pridávaním ďalších odporov rovnakým spôsobom? Ako a koľko najmenej odporov treba pridať do zapojenia, aby jeho odpor bol menší ako R?



Návod. Všimnite si odpor úplne naľavo hore.

Riešenie. Po tom ako sme si všimli odpor naľavo hore vidíme, že schéma je vlastne jeden odpor a k nemu v sérii zapojene divne (a pridávaním odporov čim divnejšie) zapojenie odporov, ktoré ma vždy nenulový odor. Výsledok bude teda vždy zapojenie s odporom väčším ako R. Tu je aj riešenie na druhu otázku. Musíme sa zbaviť sériového zapojenia všimnutého odporu, najlepšie tak, že k nemu čosi paralelne priradíme. Stačí teda jeden odpor zvislo pred neho. Konkrétne hodnoty odporov sa už ľahko dopočítajú.

Príklad 11. Nájdite odpor nasledujúceho zapojenia. Každý rezistor ma odpor R.



Návod. To, že sme niektoré body vodivo spojili znamená, že ich môžeme považovať že jeden bod. Takto mame schému s troma bodmi A,B,C a piatimi odpormi. Teraz už len zostava prekresliť schému a uvidieť paralelne a sériovo zapojene odpory. Ak to nie je jasne, skúste si najskôr schému s tromi odpormi, kde sú vodivo spojene body 'pred prvým' a 'medzi druhým a tretím' a body 'medzi prvým a druhým' a 'za posledným'.

Výsledok. $R/2$

Príklad 12. Tento príklad je zovšeobecnením predchádzajúceho. Majme nepárny počet odporov $2n-1$ zapojených v rade za sebou, $n \geq 1$. Teraz vodivo spojím bod pred prvým vodičom s bodom medzi vodičom n a $n+1$. Potom postupujeme odpor za odporom a vo výslednom zapojení sú vždy vodivo spojene body, ktoré majú medzi sebou n vodičov. Aký je odpor výsledného zapojenia medzi koncovými bodmi?

Návod. Postup ako v predchádzajúcom príklade. Výsledné zapojenie ma vlastne n bodov, treba medzi ne dokresliť odpory a potom už len zrátať sériovo-paralelne zapojenie.

3 Ohmov zákon v úlohach

- experimentálne zistená závislosť medzi prúdom a napätím, jeden z mnohých lineárnych zákonov fyziky
- verzia 1 : prúd (tj. množstvo náboja za jednotkový čas), ktorý prejde rezistorom je priamo úmerný napätiu, na ktoré je odpor pripojený, pričom konštanta úmernosti je prevrátená hodnota odporu rezistora

$$I = \frac{1}{R}U$$

verzia 2 : ak rezistorom s odporom R preteká prúd I, rozdiel napätí na jeho koncoch je

$$U = RI$$

verzia 3 : ak rezistorom, napojeným na napätie U prechádza prúd I, jeho odpor je

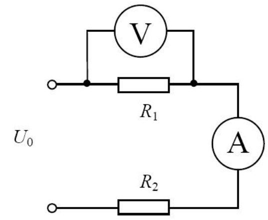
$$R = \frac{U}{I}$$

- síce všetky verzie sú jedna a ta istá rovnica, treba vidieť ich rozdielny význam
- sériovo zapojene odpory : dva odpory R_1 a R_2, keďže náboj sa zachováva, oboma prechádza rovnaký prúd I; napätie na odpore je $U_{1,2} = IR_{1,2}$; odpory chceme nahradiť jedným odporom R, pre ktorý platí $R = U/I$ keďže $U = U_1 + U_2$ dostávame $R = R_1 + R_2$
- paralelne zapojene odpory : dva odpory R_1 a R_2, pričom napätie na každom z nich je rovnaké U; prúd prechádzajúci odpormi je $I_{1,2} = U/R_{1,2}$, opäť chceme nahradiť jedným odporom, pre ktorý $R = U/I$ čo spolu s $I = I_1 + I_2$ (zachovanie náboja) dáva očakávaný výsledok
- toto sa da pekne odvodiť ale tu to budeme brat ako fakt : výkon , ktorý sa uvoľni na rezistore (tj. energia, ktorú elektróny pri pohybe týmto odporom stratia za jednotkový čas), ktorým prechádza prúd I a pod napätím U je $P = UI$

Príklad 13. Mame zdroj s napätím U, ku ktorému sme pripojili rezistor. Týmto rezistorom prechádzal prúd $3\,A$. Potom sme spravili to iste s iným rezistorom a dostali sme prúd $10\,A$. Aký prúd bude tiecť, oboma rezistormi zapojenými za sebou k tomu istému zdroju?

Výsledok. $30/13\,A$

Príklad 14. Ak zapojíme elektricky obvod podľa obrázka na zdroj konštantného napätia U_0, voltmeter ukáže hodnotu U_1.



a. Aký prúd I_1 prechádza ampérmetrom?

b. Aká je hodnota napätia U_0 zdroja napätia?

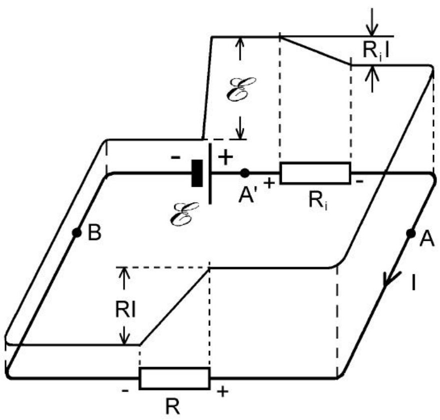
c. Akú hodnotu napätia U_2 a prúdu I_2 nameriame voltmetrom a ampérmetrom, ak voltmeter pripojíme paralelne k rezistoru s odporom R_2?

Riešenie. Tato úloha je veľmi dôležitá pre pochopenie toho, o čom v sieťach vlastne ide. Odporúčam teda nepokračovať ďalej, pokiaľ sme sa nepopasovali s úlohou ozaj dobre.

Ak je na odpore R_1 napätie U_1, podľa prvej verzie Ohmovho zákona nim preteká prúd $I_1 = U_1/R_1$. Keďže sa nikde náboj nemôže strácať, hromadiť ani vznikať, prúd tečúci cez odpor R_2 je opäť $I_2 = I_1$. Zapojenie ma odpor $R = R_1 + R_2$, ak nim ma teda tiecť prúd I_1, musí byt pod napätím

$$U_0 = I_1 R = \frac{R_1 + R_2}{R_1} U_1$$

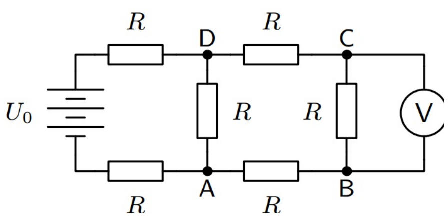
Prúd I_2 sme už vyriešili. Ostáva napätie U_2. Potenciálový rozdiel medzi svorkami odporu R_1 je U_1, celkový potenciálový rozdiel na zapojení je U_0, potenciálový rozdiel na odpore R_2 musí byt teda $U_2 = U_0 - U_1$. Tu pre pochopenie veľmi pomôže analógia medzi elektrickým a gravitačným polom, potenciálom a výškou. Tuto analógiu dokonale a bez slov vystihuje nasledujúci obrázok



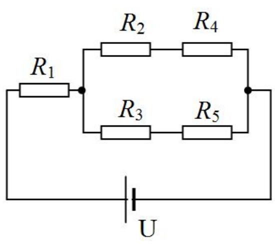
Príklad 15. a. Dva odpory R_1 a R_2 zapojíme do série a k nim paralelne pripojíme odpor R_3. Ak takúto schému zapojíme na napätie U, aký veľký prúd bude prechádzať každým z odporov a aké veľké napätie na nich bude?

b. Podobne ako v predchádzajúcej úlohe, ale vo vymenenom garde. Dva odpory R_1 a R_2 zapojíme paralelne a k nim do série pripojíme odpor R_3.

Príklad 16. Akú hodnotu bude ukazovať voltmeter v nasledujúcej schéme?



Príklad 17. Majme zapojenie ako na obrázku, pričom $R_4 < R_2 = R_5 < R_3 < R_1$. Zoraďte odpory podľa prúdu, ktorý prechádza odporom, ak odpory pripojíme na zdroj napätia U.



Návod. Stačí si poriadne premyslieť, kde sú rovnaké napätia, kadiaľ potečú rovnaké prúdy a čo to znamená pre každý z odporov.

Riešenie. $I_{R_2} = I_{R_4} < I_{R_3} = I_{R_5} < I_{R_1}$. Všimnite si, že odporom R_1 potečie najväčší prúd bez ohľadu na jeho veľkosť.

Príklad 18. Sieť zo zadania úlohy 4 pripojíme na zdroj napätia U. Vypočítajte prúdy, ktoré tečú každým z odporov a napätia na odporoch v prípadoch a),b),c).

Príklad 19. Mame dva variče (každý z nich sa sprava ako rezistor s nemenným odporom) a zapájame ich do siete s konštantným napätím. Keď ich zapájame samostatne, jeden z nich ma výkon P_1, druhy výkon P_2. Aký celkový výkon dostaneme, keď ich zapojíme sériovo?

Návod. Zo vzťahu pre výkon a ohmovho zákona vyjadriť odpor cez napätie a výkon. Potom už len sériové zapojenie odporov.

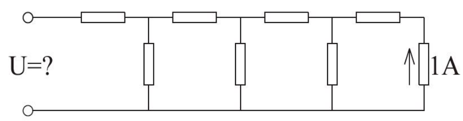
Výsledok. $\frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}$

Príklad 20. Pre zdroj napätia U je výkon uvoľnený na vonkajšom odpore rovnaký pre hodnoty odporu R_1 a R_2. Aký vnútorný odpor zdroja?

Návod. Zdroj si predstaviť ako ideálny zdroj a k nemu pripojený odpor R_i.

Výsledok. $\sqrt{R_1 R_2}$

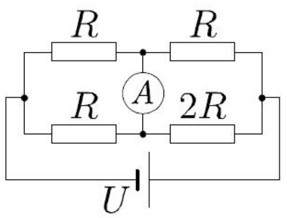
Príklad 21. Každý odpor tejto siete ma veľkosť $1\,\Omega$. Cez posledný odpor prechádza prúd $1\,A$. Aké je napätie na vstupe?



Návod. Na každom zvislom odpore musí byt rovnaké napätie ako na celom zvyšku napravo od neho (Prečo?). Každým vodorovným odporom musí prechádzať rovnaký prúd, ako celým zvyškom napravo od neho (Prečo?).

Výsledok. $34\,V$, všimnite si Fibbonaciho postupnosť

Príklad 22. Aký prúd preteká v tejto schéme ideálnym ampérmetrom? Aké bolo napätie medzi bodmi, v ktorých je zapojený ampérmeter?

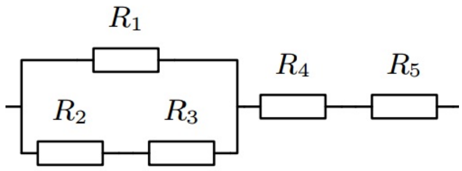


Návod. Porozmýšľať nad tým, ako s touto schémou súvisí schéma, v ktorej je ampérmeter nahradený vodičom. Úloha sa da riešiť aj pomocou Kirchofovych zákonov.

Riešenie. Majme teda schému, kde je medzi dvomi vetvami siete vodič. Odpor celého zapojenia je potom $\frac{R}{2} + \frac{2R}{3} = \frac{7}{6}R$ a sieťou teda tečie prúd $I = \frac{6U}{7R}$. V prvej časti siete majú obidva odpory rovnakú veľkosť a preto každým potečie rovnaký prúd $I/2$. V druhej časti siete sa rozdelí prúd medzi odpory R a $2R$ tak, aby na nich bolo rovnaké napätie $I_R R = I_{2R} R$ a v súčte musia dať prúd $I_R + I_{2R} = I$. Vyriešime tuto sústavu a uvedomíme si, že cez spájajúci vodič potečie rozdiel týchto dvoch prúdov. A to je náš výsledok.

Výsledok. $\frac{U}{7R}$, prečo to nie je hodnota (potenciálový rozdiel)/(odpor medzi dvoma bodmi)?

Príklad 23. Ako máme do nasledujúcej schémy zapojiť odpory veľkosti $1\,\Omega, 1\,\Omega, 3\,\Omega, 5\,\Omega, 5\,\Omega$ tak aby výsledný odpor bol čo najmenší?



4 Spájanie a rozpájanie v elektrických sieťach

- základom je nasledovný fakt : medzi bodmi, ktoré majú rovnaký potenciál netečie prúd; tak isto ako žiadne teleso sa samovoľne nehýbe po rovnej zemi

- to znamená, že aj keď medzi takými dvoma bodmi je vodič, môžeme ho kľudne rozpojiť, nakoľko by tadiaľ aj tak prúd netiekol; ak tam bol rezistor, môžeme ho predať a kúpiť si žuvačku

  to znamená, že ak medzi dva takéto body vodič pridáme, nič nepokazíme, lebo tadiaľ aj tak nikdy žiadny prúd nepotečie

  to znamená, že ak rozpojením schémy v nejakom bode vzniknú dva body, ktoré majú rovnaký potenciál, opäť sme nič nepokazili, tejto krok je vlastne pridanie vodiča, prekreslenie a jeho následné vypustenie

- všetky tieto veci robíme, keď prekresľujeme schémy, pri tom predpokladáme, že potenciál sa mení iba na odporoch (pripadne neskôr iných súčiastkach) a vo vodičoch je všade rovnaký

- ako prísť na to, že dva body budú mat rovnaký potenciál

  - výpočtom z Ohmovho zákona
  - ak ma schéma symetriu (tj. transformáciu, ktorá ju nezmení, prevedie na takú istú), ktorá zachováva body zapojenia, tak body, ktoré sa zobrazia jeden na druhy majú rovnaký potenciál

    dôvod - pred transformáciou potenciál ϕ_1, po transformácii potenciál ϕ_2, ale keďže symetria je to ta istá schéma, takže $\phi_1 = \phi_2$

  - ak ma schéma symetriu, ktorá vymení body zapojenia, tak body, ktoré sa zobrazia samé na seba majú všetky rovnaký potenciál

    dôvod - takáto symetria zobrazí na seba vždy body s opačným potenciálom, lebo v bodoch zapojenia môžeme zobrať potenciály $\phi, -\phi$ a potom z Ohmovho zákona a symetrie pretekajúcich prúdov dostaneme toto tvrdenie (premyslieť), pre body, ktoré sa zobrazia samé na seba platí $\phi_{pred} = \phi_{po}$ ale $\phi_{pred} = -\phi_{po}$ takže $\phi_{pred,po} = 0$ a všetky majú rovnaký (=nulový=presne medzi bodmi zapojenia) potenciál

  všetky tieto argumenty je dobre si poriadne premyslieť, da sa pri tom pochopiť veľa o fungovaní sveta

- mnohé zložite schémy sa dajú takýmto trikom previesť na schému, ktorá je už iba paralelné a sériové zapojenie odporov

Príklad 24. Vrcholy štvorca spojíme každý s každým odporom veľkosti R. Aký odpor nameriame medzi protiľahlými vrcholmi? Aký medzi vrcholmi na jednej hrane?

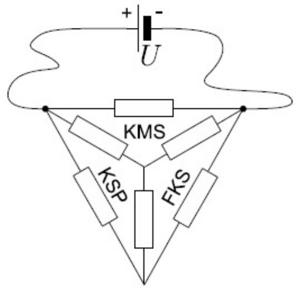
Návod. Takýto štvorec je vlastne sieťou štvorstenu, ktorá ma úžasné symetrie.

Riešenie. Keď uvidíme v štvorci štvorsten, riešenie je už priamočiare. V prvom rade vidíme že obe zapojenia sú vlastne to iste zapojenie. Potom vidíme že zvyšné dva vrcholy majú rovnaký potenciál. To vidno z oboch možných symetrii a tiež z Ohmovho zákona, nakoľko prúdy tečúce k týmto bodom musia byt vďaka symetrii rovnaké. Odpor, ktorý spája nezapojene body teda môžeme vypustiť a body rozpojiť. Rovnako ich môžeme spojiť. Overte, že takto získane výsledky sú rovnaké.

Ak v štvorci štvorsten neuvidíme, môžeme si všimnúť symetriu podľa priamky, ktorá spája body zapojenie v prvom prípade. Žiaľ, v druhom prípade by sme symetriu v rovine hľadali ťažko.

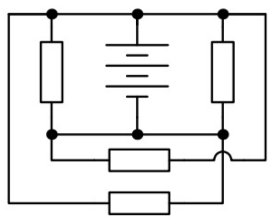
Výsledok. $R/2$ v oboch prípadoch

Príklad 25. Šesť rezistorov s odporom R sme zapojili do schémy tvaru „Trojstenu". Aký veľký prúd preteká zdrojom?



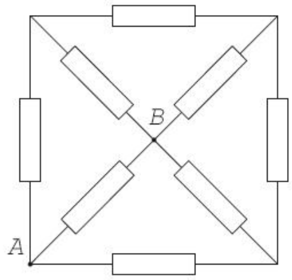
Výsledok. $2U/R_0$

Príklad 26. Aký prúd tečie cez zdroj, ak jeho napätie je U a každý odpor má veľkosť R?



Výsledok. $4U/R$

Príklad 27. Osem rovnakých odporov je zapojených podľa obrázku. Aký je odpor medzi bodmi A a B.



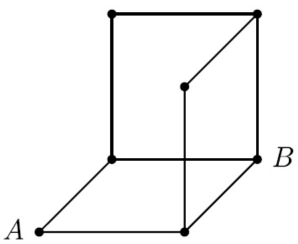
Výsledok. $\frac{7}{15}R$

Príklad 28. Kostra štvorstenu ABCD je vyrobená z drôtu tak, že každá hrana ma odpor R, iba hrana AB ma odpor $2R$. Aký prúd bude pretekať obvodom, ak na tuto hranu privedieme napätie U?

Návod. Úloha 24.

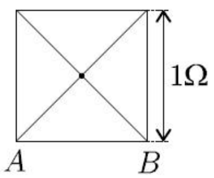
Výsledok. $\frac{3U}{2R}$

Príklad 29. Z drôtenej kostry kocky odstrihneme tri hrany vychádzajúce z jedného vrcholu. Aký je odpor medzi vrcholmi A a B, ak odpor každej hrany je R_0?



Výsledok. $\frac{9}{10}R_0$

Príklad 30. Aký je odpor medzi bodmi A a B v takomto zapojení, ak je odpor vodiča úmerný jeho dĺžke.

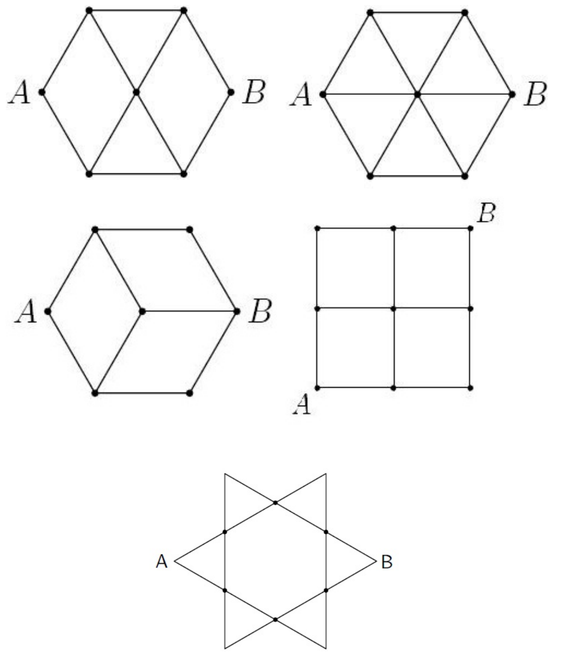


Riešenie. Ak rozpojíme zapojenie v strednom bode vodorovne (tj. dostaneme štvorec s dvoma trojuholníkmi, jeden vrcholom nahor a druhy nadol), dostaneme schému, ktorá je symetrická podľa zvislej osy štvorca. Preto majú oba body, ktoré vznikli rozpojením rovnaký potenciál a to dáva nášmu rozpojenie za pravdu. Dopočítať výsledný odpor je už potom malina. Zamyslite sa, prečo nemôžeme rozpojiť zapojenie v tom istom mieste zvislo?

podľa rovnakej symetrie môžeme spojiť bod v strede a stredy vodorovných hrán. Overte, že takto dostaneme rovnaký výsledok!

Výsledok. $0,478\,\Omega$

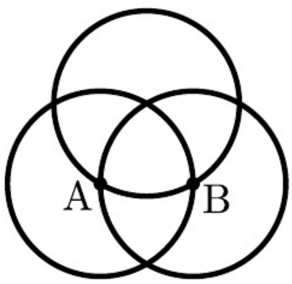
Príklad 31. Nájdite odpor medzi bodmi A a B v týchto schémach. Každé dva uzly sú spojene odporom veľkosti R.



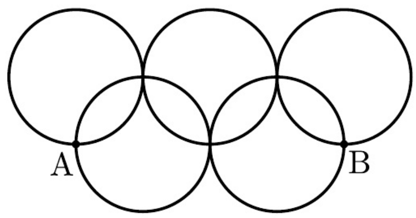
Návod. Spájajte a rozpájajte čo vám hrdlo ráči. Skúste vypočítať každú schému viac ako jedným spôsobom a porovnať výsledky.

Výsledok. a) $\frac{4}{3}R$, b) $\frac{4}{5}R$, c) $\frac{11}{10}R$, d) $\frac{3}{2}R$, e) $\frac{5}{3}R$

Príklad 32. a. Aký je odpor zapojenie troch kruhov z drôtu konštantnej dĺžkovej vodivosti medzi bodmi A a B? Drôt ktorý tvorí jeden kruh má odpor R, stredy kruhov ležia vo vrcholoch rovnostranného trojuholníka a v miestach kde sa prekrývajú sú vodivo spojené.



b. Aký je odpor zapojenie piatich kruhov z drôtu konštantnej dĺžkovej vodivosti medzi bodmi A a B? Drôt ktorý tvorí jeden kruh má odpor R, kruhy sú romiestnené podľa obrázka, najdlhší oblúk má dĺžku 3/4 obdovdu kruhu, najkratší 1/4 a v miestach dotyku a prekryvu sú kruhy vodivo spojené

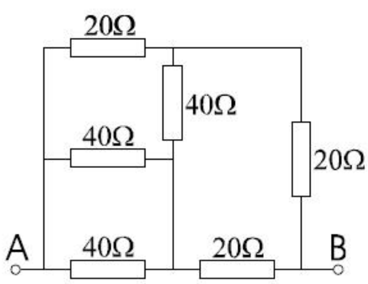


Výsledok. a) $R/14$, b) $\frac{8}{29}R$

Príklad 33. Z vodiča urobíme štvorec. Stredy strán tohto štvorca spojíme takým istým vodičom, čim dostaneme štvorec v štvorci. Aký je odpor tohto čuda, ak ho zapojíme za protiľahlé vrcholy veľkého štvorca. A aký ak za vrcholy ležiace na jednej hrane? Ako sa zmení odpoveď na obe otázky, ak podobne pridáme ešte jeden štvorec do menšieho štvorca?

Príklad 34. Podobne ako v úlohe 33 ale s trojuholníkom. Odpor vypočítajte pri zapojení v dvoch vrcholoch veľkého trojuholníka a vo vrchole a v strede protiľahlej strany.

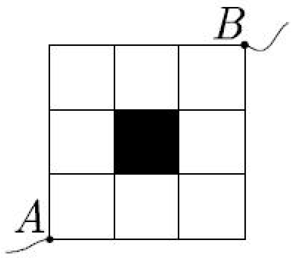
Príklad 35. Nájdite odpor medzi bodmi A a B v tejto schéme.



Návod. Ktoré dva odpory sú paralelne zapojene a dajú sa nahradiť jedným, čim úloha získa symetriu?

Výsledok. $20\,\Omega$

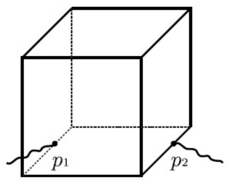
Príklad 36. V schéme na obrázku je čierny štvorček dokonale vodivý. Aký odpor nameriame medzi bodmi A a B?



Riešenie. Najskôr môžeme cely štvorček zcucnút do jedného bodu, nakoľko ma všade rovnaký potenciál. Potom môžeme tento bod porozpájat tak, aby mali rozpojene body rovnaký potenciál a dostaneme zrátateľné zapojenie.

Výsledok. $8R/5$

Príklad 37. Ako to už býva v príkladoch o kocke z drôtu, mame z drôtu s konštantnou dĺžkovou vodivosťou poskladanú sieť kocky. Jedna hrana má odpor R_0. A ako to už býva v príkladoch o odporoch, chceme vedieť, aký odpor bude mat kocka medzi dvoma vyznačenými bodmi.



Výsledok. $7R_0/8$

Príklad 38. Rezistory s odporom R sú pozapájane v hranách pravidelného osemstena. Okrem toho spojíme každú dvojicu protiľahlých vrcholov vodičom s nulovým odporom. Aký je odpor medzi dvoma susednými vrcholmi?

Výsledok. $R/6$

Príklad 39. Vypočítajte odpor kocky, ktorá ma na každej hrane odpor $1\,\Omega$ medzi vrcholmi

a. na telesovej uhlopriečke,

b. na jednej hrane kocky,

c. na uhlopriečke steny.

Riešenie. a. Najskôr si ukážme metódu, ktorá využíva symetriu úlohy, ale nie spájanie a rozpájanie. Ak do bodu zapojenia prichádza prúd I, rozdelí sa (zo symetrie) na tri rovnaké prúdy $I/3$. Tie sa potom rozdelia na dva prúdy $I/6$. Každú možnú cestu z jedného bodu zapojenia do druhého teda tvoria dve hrany s prúdom $I/3$ a jedna s prúdom $I/6$. Celkový potenciálový rozdiel je potom $I(2/3+1/6) = I5/6$. Hľadaný odpor je teda $5/6$. Odporúčam premyslieť na nakreslenej kocke, pripadne kocke cukru.

Kocka ma pri takomto zapojení dve sady bodov, ktoré majú rovnaký potenciál. Sú to body, ktoré sú na jednej hrane s prvým bodom zapojenia a na jednej hrane s druhým bodom zapojenia. Da sa na to prísť napríklad výpočtom z Ohmovho zákona (zo symetrie každou z týchto hrán preteká rovnaký prúd), alebo dvoma rovinnými symetriami problému. To potom vedie na sériové zapojenie troch paralelných zapojení, a to troch, šiestich a opäť troch odporov.

b. Tu už žiaľ Ohmom zákon nepomôže. Zato symetria áno.

c. Použitím symetrie úlohy podľa uhlopriečnej roviny, ktorá neobsahuje body zapojenia dostaneme jednoduchú schému odporov $1\,\Omega$ a $0,5\,\Omega$. Všimnite si, že použitím symetrie podľa uhlopriečnej roviny, ktorá obsahuje body zapojenia nedostaneme jednoduchú schému. Ta sa ale da previesť podobne ako v úlohe 35 na to iste zapojenie ako v prvom prípade.

Príklad 40. Rovnako ako predchádzajúci príklad, ale s pravidelným osemstenom.

Príklad 41. Rezistory s odporom R sú pozapájane v hranách pravidelného dvanásťstena. Určte odpor medzi jeho dvoma protiľahlými vrcholmi.

Návod. Úloha 39a s o čosi zložitejšou geometriou dvanásťstenu.

Výsledok. $7R/6$

Príklad 42. Mame pravidelný N uholník, kde je každý vrchol spojený s každým odporom R. Aký je odpor medzi dvomi vrcholmi?

Výsledok. $2R/N$, po tom ako vyriešite úlohu pomocou symetrie a rozpájania skúste úlohu vyriešiť odhadnutím výsledku z prvých niekoľko prípadov a dokázaním indukciou, pripadne naopak

Príklad 43. Vypočítajte odpor N-rozmernej kocky, ktorá ma na každej zo svojich hrán odpor R. Odpor meriame na protiľahlých vrcholoch, t.j. medzi bodmi $(0,\ldots,0)$ a $(1,\ldots,1)$.

Návod. Úloha 39a s o čosi zložitejšou geometriou N-rozmernej kocky.

5 Úlohy na Kirchhofove zákony

- Kirchofove zákony v sebe vtipne a účinne skrývajú dve vcelku jednoduché tvrdenia
- prvý : súčet prúdov vchádzajúcich do uzla je rovnaký, ako súčet prúdov vychádzajúcich z uzla

  inak povedane náboj sa zachováva, lebo uväzujeme ustálený stav, kde sa náboj nikde nehromadí a keďže chudák nemôže vzniknúť ani zaniknúť, ten čo pritečie musí aj odtiecť
- druhý : v uzavretej slučke elektrického obvodu je súčet napätí rovnaký ako úbytok napätí IR na odporoch (všade zobraté znamienko do úvahy)

inak povedane potenciál v tomto bode sa ozaj rovná potenciálu v tomto bode, nakoľko ak sa po uzavretej slučke vrátim do toho istého bodu, zmena potenciálov musí byt nulová, takže prírastky vďaka zdrojom musia byt rovnaké, ako úbytky na odporoch (prírastok proti smeru je úbytok a naopak)

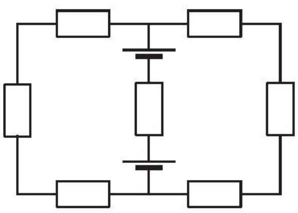
tu opäť vyhráva analógia s gravitačným polom, vozením sa na výťahu (zdroj) a kráčaním dolu schodmi (odpor)

- tieto dva zákony sú ťažká delostrelecká zbraň proti ľubovoľnému elektrickému nepriateľovi a vrelo odporúčam premyslieť, ako by sa predchádzajúce úlohy pomocou nich riešili

  to že sa každá úloha takto da riešiť ešte neznamená, že ju tak vždy budeme riešiť, lebo zväčša dostávame veľa rovníc o veľa neznámych a každé obídenie steny namiesto jej zdemolovania hlavou je vítane

  tak ci onak najmä so silou počítačov a zložitejšími schémami to nie je neschodná cesta

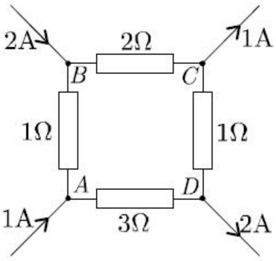
Príklad 44. Z rezistorov s odporom $1\,k\Omega$ a dvoch zdrojov s napätím $9\,V$ postavíme schému ako na obrázku. Aký prúd tečie rezistorom medzi zdrojmi?



Riešenie. Ak cez tento rezistor tečie prúd I, potom cez pravú aj ľavú vetvu tečie prúd $I/2$, čo vedie na rovnicu $3IR/2 + IR = 2U$.

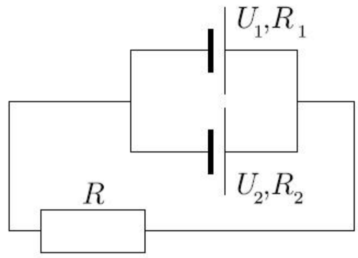
Výsledok. $7,2\,mA$, po tom ako to vypočítate pomocou Kirchhofovych zákonov si skúste schému prekresliť

Príklad 45. Aký je potenciálový rozdiel (napätie) medzi uzlami A a B na obrázku?



Výsledok. $\frac{2}{7}\,V$

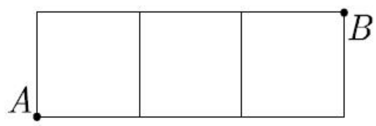
Príklad 46. Majme rezistor s odporom R a dva zdroje s napätím U_1, resp. U_2 a vnútornými odpormi R_1, resp. R_2. Zapojme ich podlá obrázka. Aké je napätie na rezistore s odporom R.



Riešenie. Sústava rovníc, na ktorú vedú Kirchhofove zákony je $U_1 + I_1R_1 = U_2 + I_2R_2, IR = U_2 + I_2R_2, I = I_1 + I_2$, z ktorej už ľahko dopočítame prúd I a potom napätie IR

Výsledok. $\frac{U_1R_2+U_2R_1}{R_1R_2+R(R_1+R_2)}R$

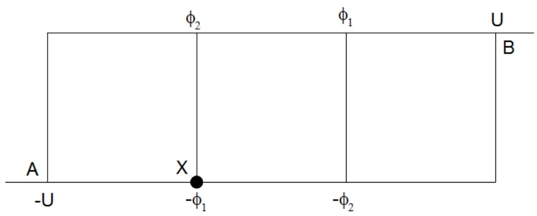
Príklad 47. Hrana jedného štvorca na obrázku ma odpor R. Aký odpor nameriame medzi bodmi A a B?



Návod. Úloha sa da riešiť bez akýkoľvek fínt hrubou silou. Vrelo odporúčam precvičiť, na začiatok napríklad so zapojením z dvoch štvorcov.

Avšak da sa všimnúť si symetria úlohy a potom zjednodušiť cele počítanie, nakoľko nájdeme body, ktoré majú opačný potenciál. Nezabudneme na vzťah $I = \Delta\phi/R$ a vystačíme len s prvým zákonom.

Riešenie. Stredová symetria podľa stredu prostredného štvroca vymení body zapojenia ale schému nechá nezmenenú. To znamená, že potenciály budú vyzerať nasledovne (Prečo?)



Prúd, ktorý težie medzi bodmi A a X je $(-\phi_2 + U)/R$, z čoho dostávame prvý zákon v tvare

$$\frac{-\phi_1 + U}{R} + \frac{-\phi_1 - \phi_2}{R} + \frac{-\phi_1 + \phi_2}{R} = 0$$

a podobne pre bod s potenciálom ϕ_2. Riešením týchto dvoch rovníc potom dostávame hodnoty ϕ_1, ϕ_2 a z nich celkový prúd

$$I = \frac{U - \phi_1}{R} + \frac{U + \phi_2}{2R}$$

Odpor zapojenia je potom jednoducho U/I

Výsledok. $\frac{15}{8}R$

Príklad 48. Vypočítajte odpor medzi dvoma susednými bodmi štvorca, ktorého strany majú odpor R a ktorého uhlopriečky majú odpor $R/2$.

Návod. Opäť môžeme bezhlavo rátať dva zákony. Avšak rohy, v ktorých nezapájame majú zo symetrie a Ohmovho zákona opačné potenciály. Potom už podobne ako v úlohe 47 zapíšeme prvý zákon pre jeden z nezapojených vrcholov, čim sa úplne vyhneme druhému zákonu.

Výsledok. $\frac{5}{12}R$

Príklad 49. Vo štvorci ABCD je na každej hrane jeden odpor, veľkosti $R_{1,2,3,4}$ a okrem toho sú body B,C spojene odporom R_5. Aký je odpor medzi bodmi AD?

Návod. Áno, ozaj treba veľmi veľa počítať. Alebo použiť počítač.

Príklad 50. Vypočítajte odpor medzi dvoma hranami siete štvorstenu, pričom na každej hrane je rôzny odpor $R_{1,2,3,4,5,6}$. To iste pre kocku a $R_{1,\dots,12}$.

6 Siete jednosmerného prúdu s kondenzátormi

- do obvodov nám pribudne nová súčiastka, kondenzátor, ktorý ma tieto najdôležitejšie vlastnosti
  - v ustálenom stave nim netečie prúd a sprava sa ako dokonalý izolant[1]
  - na jeho doskách sa môže hromadiť náboj, na jednej klady a na druhej záporný
  - môže na ňom byt potenciálový rozdiel a ak je na nim potenciálový rozdiel U, tak je na nim nahromadený náboj

    $$Q = CU$$

    kde C je konštanta, ktorá je charakteristikou konkrétneho kondenzátora
  - dva kondenzátory zapojene paralelne sa správajú ako jeden kondenzátor, ktorý ma kapacitu

    $$C = C_1 + C_2$$

    dôvod - na oboch kondenzátoroch je napätie U, takže náboje na nich sú $Q_1 =$

[1] Ak sa zaujímame o nestacionárne prúdy, toto nie je pravda a pri nabíjaní kondenzátora nim prúd tečie. Dokonca na začiatku nabíjania sa kondenzátor sprava ako ideálny vodič.

$UC_1, Q_2 = UC_2$, celkový nazhromaždený náboj je teda $Q = Q_1 + Q_2 = CU$

– dva kondenzátory zapojene do serie sa správajú ako jeden kondenzátor, ktorý ma kapacitu

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

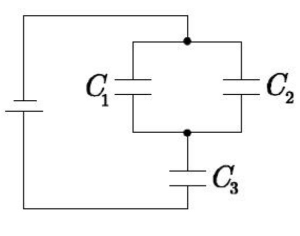
dôvod - zapojme také dva kondenzátory na napätie U, potom napätie na kondenzátoroch je $U_1 + U_2 = U$, náboj na vnútorných doskách majú opačný a rovnakej veľkosti, takže $C_1 U_1 = C_2 U_2 = Q$, pričom takýto náboj sa nazhromaždí aj na 'novom' kondenzátore, pre kapacitu ktorého $C = Q/U$

- s kondenzátormi sa da zväčša vysporiadať pomocou sedliackeho rozumu alebo druhého kirchhofovho zákona

- do potenciálového spádu zarátame aj napätie na kondenzátore

Príklad 51. Dva kondenzátory s kapacitou C_1 a C_2 zapojíme do série a k nim paralelne pripojíme kondenzátor s kapacitou C_3. Ak takúto schému zapojíme na napätie U, aký veľký náboj sa nahromadí na každom z kondenzátorov?

Príklad 52. Koľkokrát sa zmení náboj na kondenzátore C_3, ak sa kondenzátor C_2 prebije (=stane sa nevodivým)?

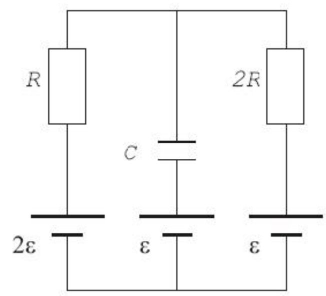


Návod. Poriadne si premyslieť, ako to je s tými sériovými a paralelnými kondenzátormi.

Riešenie. Treba vypočítať náboje na kondenzátoroch pred a po prebití jedného z nich. Cele zapojenie pred prebitím ma kapacitu $C = \frac{(C_1+C_2)C_3}{C_1+C_2+C_3}$, po prebití $C' = \frac{C_1 C_3}{C_1+C_3}$. V prvom prípade je na kondenzátore C_3 náboj CU, v druhom $C'U$ (prečo?).

Výsledok. $\frac{C_1(C_1+C_2+C_3)}{(C_1+C_2)(C_1+C_3)}$

Príklad 53. Určte náboj, ktorý sa v tejto schéme nahromadí na kondenzátore.

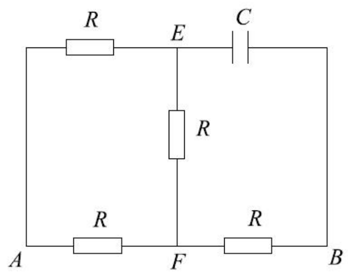


Riešenie. Kirchhofove zákony nám dávajú

$-2\mathcal{E} + RI + Q/C + \mathcal{E} = 0\,,\ -\mathcal{E} - Q/C + 2RI + \mathcal{E} = 0$

Výsledok. $Q = \frac{2}{3} C\mathcal{E}$

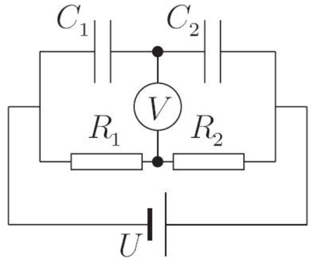
Príklad 54. Aký náboj sa nahromadí na kondenzátore, ak pripojíme body A a B na potenciálový rozdiel U.



Riešenie. Kirchhofove zákony pre pravú slučku nám dávajú $IR + I_{EF}R = Q/C$, ostáva už len z kirchofovho zákona pre ľavú slučku určiť prúd I_{EF}

Výsledok. $\frac{4}{5}UC$, všimnite si, že výsledok úlohy je taký istý, ako keby sme rátali obvod bez kondenzátora, vypočítali rozdiel potenciálov medzi bodmi E a B a potom na taký potenciálový rozdiel napojili kondenzátor (prečo?)

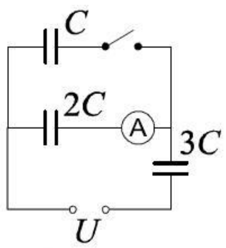
Príklad 55. Aké napätia ukazuje voltmeter na obrázku?



Návod. Voltmeter ukáže potenciálový rozdiel medzi dvoma miestami, kam sme ho zapojili. Aký je potenciál v hornom bode? Aký je potenciál v dolnom bode?

Výsledok. $U\left(\frac{C_2}{C_1+C_2}-\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)$

Príklad 56. Aký náboj pretečie ampérmetrom, keď v schéme na obrázku zapneme spínač?

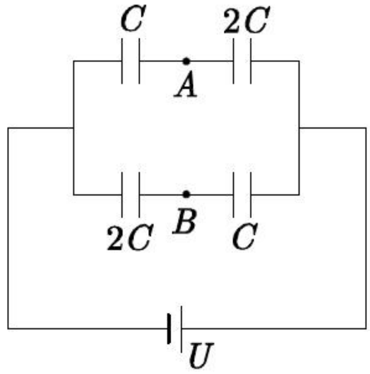


Návod. Ako sa zmení náboj na kondenzátore s kapacitou $2C$ a čo to znamená pre náboj, ktorý pretečie cez ampérmeter?

Riešenie. Pred zapnutim je na oboch kondenzatoroch náboj $6CU/5$. Po zapnutí spínača je celkový náboj na kondenzátoroch $9CU/6$, čo dá potenciál na treťom kondíku $U/2$. Na zvyšných kondenzátoroch mnusí byť potom rovnaké napätie, ktoré toto dopĺňa do celkového napätia U, čo dá náboj na druhom kondenzátore po zapnutí CU.

Výsledok. $\frac{1}{5}CU$

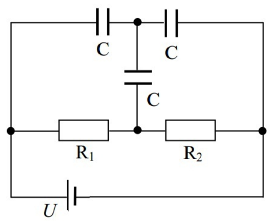
Príklad 57. Na obrázku je schéma kondenzátorov pripojených k zdroju jednosmerného napätia U. Vypočítajte napätia medzi bodmi A a B.



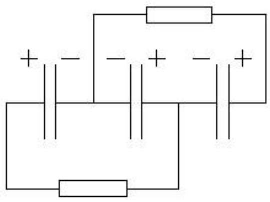
Návod. V akom vzťahu sú náboje na kondenzátoroch v každej vetve? V akom vzťahu sú napätia na nich?

Výsledok. $U/3$

Príklad 58. Aký náboj sa nahromadí na každom z kondenzátorov a aký prúd potečie každým z vodičov v nasledujúcej schéme?



Príklad 59. Všetky kondenzátory na obrázku majú kapacitu C a na začiatku sú nabite na potenciál U a s polaritou ako na obrázku. Aké budú napätia na kondenzátoroch keď sa po uzavretí obvodu obvod ustali?

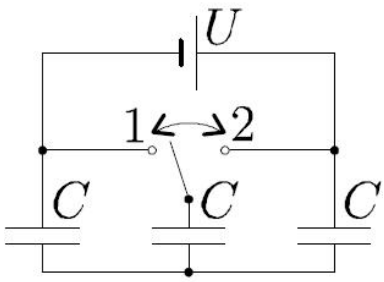


Návod. Na častiach obvodu, ktoré sú oddelene platí zákon zachovania náboja.

Riešenie. Zachovanie náboja dá rovnicu $CU + CU - CU = U_1C + U_2C - U_3C$ (predpokladame polaritu ako v pri pôvodnom nabití) plus dva krát druhý kirchofov zákon $U_1 - U_2 = U_2 + U_3 = 0$

Výsledok. $U/3, U/3, -U/3$ s polaritou ako pri pôvodnom nabití, všimnite si, že odpory v zapojení nemajú žiadny vplyv na výsledok (prečo?)

Príklad 60. V obvode prepneme prepínač z polohy 1 do polohy 2. Aká energia sa pri tom uvoľni, ak toto prepnutie trvá nulový čas?



Návod. Aké je rozloženie nábojov pred a po prepnutí spínača? Aký potenciálový rozdiel prekonal náboj, ktorý prešiel z jedného na druhy kondenzátor? Tu sa opäť hodí analógia medzi elektrickým a gravitačným polom.

Výsledok. $U^2C/3$

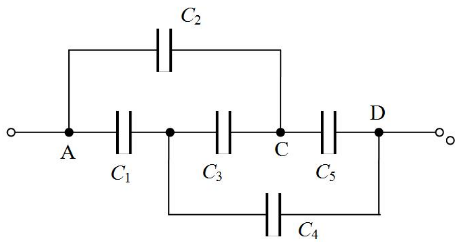
Príklad 61. Mame dva kondenzátory s kapacitou C_1 a C_2, ktoré postupne nabijeme na napätia U_1 a U_2. Vodivo spojíme platne, na ktorých je rovnaké znamienko náboja. Koľko percent energie sa stratí, keď sa sústava ustali?

Návod.

Riešenie.

Výsledok. $\frac{C_1C_2(U_1-U_2)^2}{(C_1+C_2)(C_1U_1^2+C_2U_2^2)}$

Príklad 62. Sústava kondenzátorov je zapojená podľa schémy na obrázku.



a. Určte celkovú kapacitu sústavy medzi uzlami A a D.

b. K uzlom A a D pripojíme zdroj konštantného napätia U. Určte, na aké napätia sa po pripojení zdroja nabije kondenzátor C_3.

Riešenie. Priveďme na schému napätia U. Na každom kondenzátore sa ustali nejaké napätia a nejaký náboj, pričom $Q_i = C_iU_i$ pre každý kondenzátor. Zákon zachovania náboja v uzatvorených častiach obvodu nám da dve rovnice. Ďalšie tri rovnice dostaneme keď napíšeme tri kirchhofove zákony pre uzavreté slučky. Inak povedane, medzi bodmi A a D je vždy napätia U, nech sa tam dostanem cez ľubovoľne kondenzátory. Takto mame 5 rovníc o piatich neznámych, ktoré hravo vyriešime. Dokonca ich nemusíme vyriešiť úplne, nám totiž stačí vedieť U_1 a U_2, lebo

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \frac{U_1C_1 + U_2C_2}{U}$$

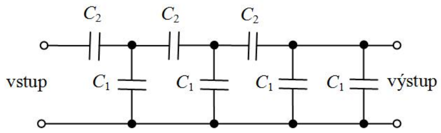
Na úlohu b. nám treba z tejto sústavy vypočítať U_3. Pripadne si stačí uvedomiť, že $U_3 = U_1 - U_2$.

Príklad 63. Vypočítajte kapacitu kocky, ktorá ma na každej svojej hrane kondenzátor s kapacitou C, ak ju zapojíme do obvodu vo vrcholoch na telesovej uhlopriečke.

Návod. Úloha 39a s o čosi iným pravidlom pre zapájanie kondenzátorov.

Výsledok. $6C/5$

Príklad 64. Určte napätia U na výstupe siete nakreslenej na obrázku, ak na vstup pripojíme zdroj s napätím U_0.



Pre kapacity kondenzátorov uväzujte dva prípady:

a. $C_2 = 2C_1$,

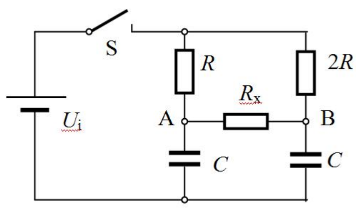
b. $C_2 = C_1$.

Návod. a. Schému si trochu prekresliť a potom si všimnúť podobnosť s úlohou 5.

b. Rátať kapacity do zblaznenia

Výsledok. a. $U_0/8$, b. $U_0/21$

Príklad 65. Na obrázku je elektricky obvod tvorený rezistormi a kondenzátormi. Elektrický zdroj s vnútorným napätím U_i ma zanedbateľne malý vnútorný odpor. Kondenzátory s kapacitou C sú na začiatku vybite. Aký náboj prejde cez spojovací vodič AB so zanedbateľným odporom ($R_x = 0$) počas nabíjania kondenzátorov, ak zapneme spínač S? Aká je odpoveď na predchádzajúcu otázku, ak ma spojovací vodič AB odpor $R_x = R$?



7 Nekonečné odporové siete

- tato časť je veľmi ťažká :)
- budeme potrebovať dva nove poznatky, ktoré však platia všeobecne, nie len pre nekonečné zapojenia
  - superpozícia - majme zapojenie, ktoré ma N vývodov $A_1, \dots, A_N$

    keď na ne privedieme potenciály $\phi_1^{(1)}, \dots, \phi_N^{(1)}$, budú z nich vytekať prúdy $I_1^{(1)}, \dots, I_N^{(1)}$, keď na ne privedieme potenciály $\phi_1^{(2)}, \dots, \phi_N^{(2)}$, budú z nich vytekať prúdy $I_1^{(2)}, \dots, I_N^{(2)}$

    potom keď na ne privedieme potenciály $\phi_1^{(1)} + c\phi_1^{(2)}, \dots, \phi_N^{(1)} + c\phi_N^{(2)}$, budú z nich vytekať prúdy $I_1^{(1)} + cI_1^{(2)}, \dots, I_N^{(1)} + cI_N^{(2)}$

    veľmi pekne o superpozicii píše Bzduso vo vzoráku k úlohe FX 3.12 v zbierke, pozor, je to vlastne príklad 72, takže nečítať ak sa s nim chcete potrápiť sami
  - čierna skriňa - majme zapojenie, ktoré ma N vývodov $A_1, \dots, A_N$

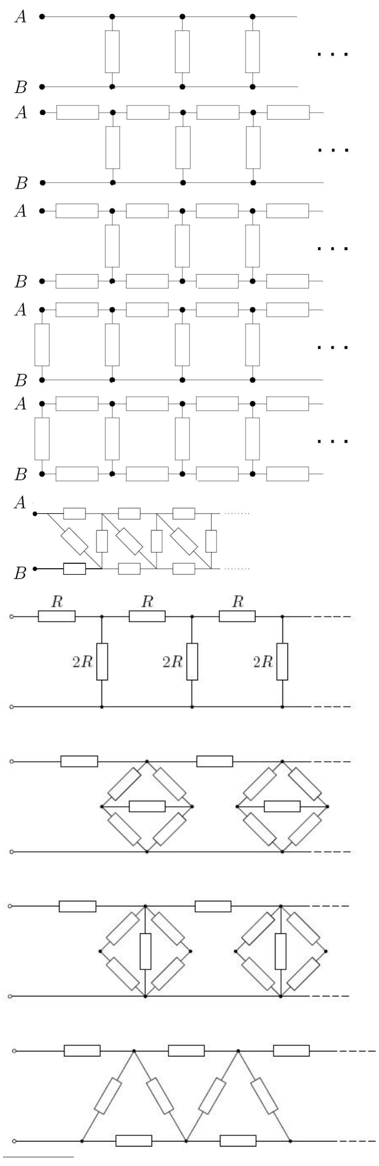
    potom toto zapojenie môžeme nahradiť N bodmi, ktoré sú každý s každým spojene jedným odporom R_{ij}, pričom tieto dve zapojenia majú rovnaký odpor medzi každou dvojicou vývodov

    pozor, odpor medzi bodmi A_i, A_j v novom zapojení, teda R_{ij}, nemusí byt rovnaký ako odpor, ktorý nameriame medzi A_i a A_j

    toto je veľmi netriviálne tvrdenie, ktoré je dôsledkom superpozicie a tiež sa o ňom čosi píše v spomínanom vzoráku
- okrem toho špeciálne pre nekonečné odpory môžeme využiť, že časť obvodu sa často podoba na obvod cely
- vhodne žonglovanie s týmto a tým, čo sme sa naučili doteraz by malo viest k zdarnému koncu
- spomeňme ešte, že v skutočnosti nič ako nekonečné situácie neexistuje; v prírode je konečne veľa materiálu a konečne veľa priestoru; ak sa pýtame na nejakú vlastnosť nekonečnej situácie, mysli sa tým toto : mame

postupnosť konečných situácii ktoré sa postupne približujú k nasej nekonečnej. k čomu sa približuje postupnosť vlastnosti týchto konečných situácii?

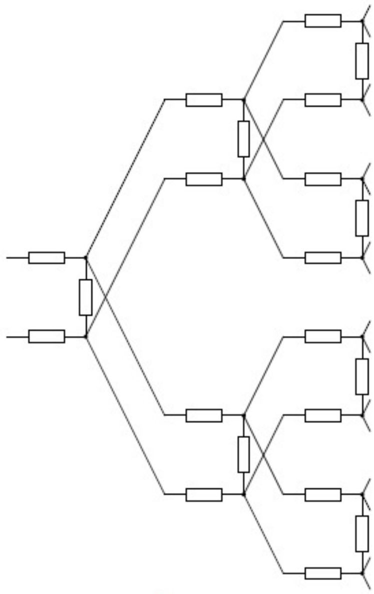
Príklad 66. Vypočítajte odpor medzi bodmi A a B v nasledujúcich nekonečných schémach. Jeden rezistor ma vždy odpor R. Pri počítaní každej ďalšej schémy zabudnite, že ste počítali predchádzajúce, teda napríklad nepovážujte tretiu schému za sériové zapojenie druhej a odporu R. Na druhej strane je to fajn spôsob, ako si overiť výsledok.



Návod. Všade funguje zvyčajná finta s nahradením časti siete odporom R', ktorý je rovnaký ako odpor siete a potom riešiť už len paralelne/sériovo zapojene odpory. Prečo je odpor v prvom prípade nulový a ostatných nie? Prečo je výsledok pre druhu a siestu sieť rovnaký? Bol by rovnaký aj pre sieť podobnú tej druhej, ale kde by boli odpory na preskáču hore/dole?

Výsledok. Posledné štyri : $2\,R,\ 1.62\,R,\ 1.37\,R,\ 1.46\,R$

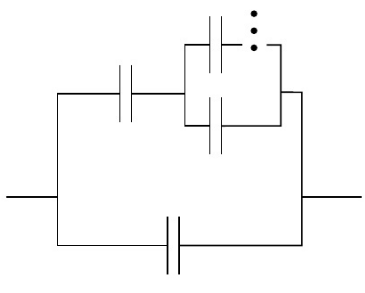
Príklad 67. Vypočítajte odpor tejto nekonečnej schémy.



Návod. Opäť bude fungovať finta ako v predchádzajúcom prípade.

Výsledok. $(1+\sqrt{17})/2\,R$

Príklad 68. Vypočítajte kapacitu tejto nekonečnej schémy, ak kapacita jedného kondenzátora je C.



Výsledok. $(1+\sqrt{5})/2\,R$

Príklad 69. Z vodiča spravíme štvorec. Rovnakým vodičom spojíme stredy strán tohto štvorca, čim vznikne menší štvorec. Stredy jeho hrán spojíme rovnakým spôsobom a takto postupujeme do nekonečna. Strana veľkého štvorca ma odpor $1\,\Omega$. Aký odpor nameriame medzi vrcholmi pôvodného štvorca, ktoré

a. ležia na uhlopriečke,

b. ležia na tej istej hrane?

Návod. Na vhodných miestach vďaka symetrii rozpojiť a potom nahradiť stredný štvorec odporom, ktorý je vhodným násobkom celého odporu R. Tento násobok zistiť z toho, že dva krát kratší kábel ma dva krát menší odpor. V druhej časti bude treba výsledok prvej.

Príklad 70. Z vodiča spravíme rovnostranný trojuholník. Rovnakým vodičom spojíme stredy strán tohto trojuholníka, čim vznikne menší trojuholník. Stredy jeho hrán spojíme rovnakým spôsobom a takto postupujeme do nekonečna. Strana veľkého trojuholníka ma odpor $1\,\Omega$. Aký odpor nameriame medzi

a. vrcholmi pôvodného trojuholníka,

b. vrcholom pôvodného trojuholníka a stredom protiľahlej strany?

c. Vrcholy najväčšieho trojuholníka vodivo spojíme. Aký bude odpor medzi vrcholom a stredom najväčšieho trojuholníka?

Návod. Podobne ako predchádzajúci príklad. V poslednej časti pomôže Ohmov zákon a rozmyslieť si, aké prúdy potečú vo vetvách siete ... a potom sčítať nekonečný rad.

Výsledok. a) $\frac{\sqrt{7}-1}{3}\,\Omega$

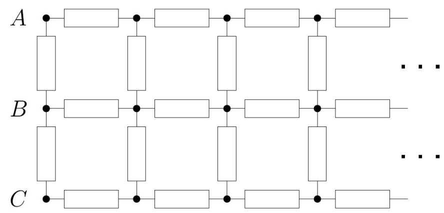
Príklad 71. Z vodiča spravíme n-uholník. Do neho umiestnime menší n-uholník tak, že každý vrchol malého je stredom strany veľkého a tieto body u vodivo spojene. Takto postupujeme do nekonečna. Aký nameriame odpor medzi

a. susednými vrcholmi najväčšieho n-uholníka,

b. vrcholom najväčšieho n-uholníka a protiľahlým vrcholom, resp. stredom protiľahlej strany?

c. Vrcholy najväčšieho n-uholníka vodivo spojíme. Aký bude teraz odpor medzi vrcholom pôvodného n-uholníka a jeho stredom útvaru?

Príklad 72. Majme dvojitý a nekonečný odporový rebrík, tak ako na obrázku. Každý z odporov ma odpor R.



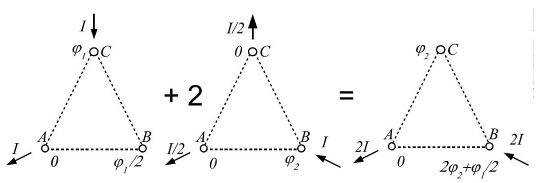
a. Vypočítajte odpor medzi bodmi A a C.

b. Vypočítajte odpor medzi bodmi A a B, ak sú body A a C vodivo spojene (vodičom s nulovým odporom).

c. Vypočítajte odpor medzi bodmi A a B.

Návod. V prvých dvoch prípadoch využiť symetriu a vhodne rozpojí/spojiť. V tretej úlohe použiť superpoziciu predchádzajúcich dvoch alebo čiernu skrinku.

Riešenie. Nasleduje skrátene riešene časti c) ako vo vzoráku zo zbierky Fx. Pomôže superpozicia predchádzajúcich dvoch časti. V prípade a) sú potenciály na bodoch A, B, C postupne $\phi_A = \phi_1, \phi_B = \phi_1/2, \phi_C = 0$ (prečo?) a $I_A = I, I_B = 0, I_C = -I$, prípad b) je $\phi_A = \phi_C = 0, \phi_B = \phi_2$ a $I_A = I_C = I/2, I_B = -I$ (prúdy vytekajú, takže záporný prúd znamená vtekanie)



čo nás privedie k rovnici

$$R_c = R_b + R_a/4.$$

Príklad by sa dal riešiť aj čiernou skrinkou. Medzi bodmi A, B, C by sme si predstavili trojuholník z troch odporov. Z úloh a)b) a zo symetrie by sme určili hodnoty každého odporu a potom získať výsledok časti c) nie je ťažké.

Výsledok. a) $(\sqrt{5}-1)R$, b) $\frac{\sqrt{21}-3}{4}R$, c) $\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{21}}{4}-1\right)R$

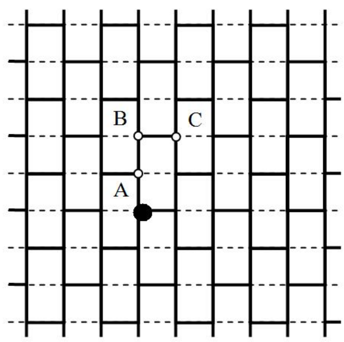
Príklad 73. Majme nekonečnú štvorcovú sieť, v ktorej je na každej hrane odpor R. Aký je odpor takejto siete medzi vrcholmi ktoré sú na jednej hrane jedného zo štvorcov siete. Aký by bol výsledok, ak by bola sieť trojuholníková?

Návod. V prvom prípade vhodná super pozícia vtekania do bodu A a vytekania z bodu B..

Riešenie. Ukážka toho, ako funguje superpozicia. Označme naše dva body A a B. Teraz najskôr priveďme na bod A potenciál U, čim do siete bude vtekať prúd I. Zo symetrie úlohy bude v každom smere tiecť z bodu A prúd $I/4$. V bode B bude teda potenciál $U - RI/4$. Nulový potenciál priveďme do nekonečna. Nekonečno teda bude akýmsi tretím vývodom, označme ho N. Mame teda zapojenie, kde je v bode A potenciál U, v bode B potenciál $U - RI/4$ a v bode N potenciál 0, pričom z týchto bodov vytekajú postupne prúdy $-I, 0, I$. Záporne znamienko znamená, že prúd vteká.

Majme teraz iné zapojenie, kde do bodu B privediem potenciál $-U$ a do bodu N dáme nulový potenciál. Zo symetrie celej siete bude týmto zapojením tiecť opäť prúd I, a opäť z každého smeru vtečie do bodu B prúd $I/4$. To znamená, že v bode A je potenciál $-U + IR/4$. Celkovo teda mame potenciály v bodoch A,B,N rovne $-U+IR/4, 0, -U$ a vytekajúce prúdy $0, I, -I$. A teraz z veľkou slávou zistime, že keď tieto dve situácie skombinujeme (spravíme ich superpoziciu), dostaneme zapojenie, kde sú potenciály $IR/4, 0, -IR/4$ a prúdy $-I, 0, I$. Medzi bodmi A a B teda tečie prúd I, pričom je na nich potenciálový rozdiel $IR/2$. Odpor medzi nimi je teda $R/2$.

Príklad 74. Nekonečna sieť je vytvorená z pravidelnej štvorcovej siete vynechaním niektorých priečok (výsledná sieť je na obrázku znázornená plnou čiarou). Strana elementárnej štvorcovej bunky (napr. AB) ma odpor R.



Aký odpor nameriame, ak pripojíme ohmmeter

a. k uzlom siete A a B,

b. k uzlom siete B a C,

c. k uzlom siete A a C,

d. k uzlu označenému čiernou bodkou a uzlu C?

Návod. V prvých troch častiach pomôže predchádzajúca úloha a prekresliť schému na šesťuholníkovú. V poslednej časti verzia čiernej skrinky.

Riešenie. Ukážeme si riešenie prvých časti čiernou skrinkou.

a) toto zapojenie ma vlastne tri vývody, A, B a nekonečno (N), mame teda trojuholník, v ktorom $R_{AB} = R, R_{AN} = R_{BN} = R'$, keď privedieme potenciál U do bodu A a nulu do bodu N, platí $I_{AN} = 2I, I_{AB} = I, I_{AB} = I, I_{BN} = I$, kirchofov zákon da potom $R' = R$, takže celkový odpor medzi A a B je $\frac{2}{3}R$

c) toto je zapojenie čo ma 4 vývody A, B, C, N (mohlo by mat aj tri ACN, ale tam by sme toho veľa nevedeli), pričom $R_{AB} = R_{BC} = R, R_{AN} = R_{CN} = R_1, R_{BN} = R_2$, opäť zapojíme do A potenciál U a do N nulový potenciál, pričom teraz platí $I_{AB} = I, I_{AN} = 2I, I_{BN} = I_{BC} = I/2, I_{CN} = I/2$, z čoho kirchof dáva $R_1 = R$ a teda odpor medzi A a C je R

časť c) inak : opäť si toto zapojenie prekreslime ako 4 vývody s $R_{AB} = R_{BC} = R, R_{AN} = R_{CN} = R_1, R_{BN} = R_2$, ale tentoraz nebudeme uvažovať žiadne prúdy, namiesto toho napíšeme podmienky : odpor medzi A a B je $2R/3$, odpor medzi A a N je taký istý ako odpor medzi B a N

$$\frac{2}{R_1 + R} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R + \frac{(R+R_1)R_2}{R_1+R_2+R}} + \frac{1}{R_1}$$
$$\frac{3}{2R} = \frac{1}{R_1 + \frac{(R+R_1)R_2}{R_1+R_2+R}} + \frac{1}{R}$$

tieto rovnice dávajú $R_2 = 2R, R_1 = R$, čo dáva očakávaný výsledok odporu medzi A a C

d) bude to chcieť čiernu skriňu čo ma 5 vývodov

Príklad 75. Majme nekonečnú štvorcovú sieť, v ktorej je na každej hrane odpor R. Aký je odpor takejto siete medzi vrcholmi ktoré sú na uhlopriečke jedného zo štvorcov siete. Aký by bol výsledok, ak by bola sieť trojuholníková?

Návod. Rovnice vyzerajú veľmi podobne ako v časti c) prechádzajúcej úlohy, s malou zmenou pre štvorcovú sieť. Mame teda 4 vývody A,B,C,N s $R_{AB} = R_{BC} = R, R_{AN} = R_{CN} = R_1, R_{BN} = R_2$ a

$$\frac{2}{R_1 + R} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R + \frac{(R+R_1)R_2}{R_1+R_2+R}} + \frac{1}{R_1}$$
$$\frac{2}{R} = \frac{1}{R_1 + \frac{(R+R_1)R_2}{R_1+R_2+R}} + \frac{1}{R}$$

Tieto rovnice majú riešenie $R_1 = \frac{R}{2}, R_2 = \frac{3R}{4}$, ostáva teda porátať zapojenie do štvorca, ktoré ide napríklad transformáciou na hviezdu abo kirchofacmi

Príklad 76. Majme nekonečnú kockovú sieť odporov, pričom každý z odporov ma odpor R. Aký nameriame odpor medzi

a. dvoma susednými vrcholmi

b. vrcholmi, ktoré ležia ne uhlopriečke štvorca,

c. vrcholmi, ktoré ležia na uhlopriečke kocky.

8 Za obzorom týchto poznámok

Naučili sme sa počítať vcelku širokú paletu rôzne náročných a rôzne zameraných príkladov. Na zaver už len stručné zhrňme, čo v týchto poznámkach bolo viac či menej nahlas zamlčané a kam by sa štúdium elektrických problémov mohlo uberať ďalej.

V celom texte sme považovali súčiastky za ideálne. V skutočnosti všetky ampérmetre, voltmetre, zdroje a iné súčiastky ideálne nie sú. To sa do istej miery dá napraviť pridaním súčiastky, napríklad odporu, ktorá bude tieto neideálne vlastnosti nahrádzať.

Ideálne však nie sú ani vodiče. Tu je problém o čosi väčší, nakoľko tým strácajú na platnosti všetky prekreslovacie, spájacie a rozpajacie finty, nakoľko menia odpor schémy, pripadne vôbec neplatia a schému menia úplné. Tu nezostává konštatovať nič iné, ako že pri rozumných rozmeroch a prúdoch sa odpory s dobrou presnosťou považovať za ideálne dajú a ľuďom, ktorí ich za také považovať nemôžu (silnoprúdový inžinieri, projektanti vedení vysokého napätia) alebo nechcú (rýpali) popriať veľa šťastia.

V neposlednom rade ma asi väčšina čitateľov pocit, že úlohy boli síce pekne, ale slušne povedané akademické. Opäť námietka, na ktorú sa odpovedá ťažko inak ako pokrčením pliec. Pravda je. Skutočné siete, ktoré sa vyskytuje v elektrotechnike a ktoré náš obklopujú všade naokolo, sú oveľa komplikovanejšie a na výpočet ich vlastnosti sa používajú často veľmi zložité a niekedy iba približné metódy. Avšak pre potreby stredoškoláka, na ilustráciu a pochopenie toho, čo sa v obvodoch deje, by mali tieto príklady slúžiť dokonale.

V texte sme vynechali jednu vcelku štandardnú techniku, ktorej sa hovorí transformácia trojuholníka na hviezdu. je to účinná zbraň v boji s príkladmi, v ktorých sa nedá rozumným spôsobom použiť nejaká finta a nič iné ako hrubá sila nezostává. Pomocou tohto triku môžme zjednodušiť zapojenie a previesť schému, ktorá inak nie je iba paralelne a sériové zapojenie odporov na niečo zrátateľné. Transformáciu si môže čitateľ naštudovať napríklad v študijnom texte českej FO. Potom sa môže pokúsiť vypočítať pomocou nej napríklad úlohy 47, 48 a 49.

Tak isto sme vo všetkých príkladoch uväzovali ustálené prúdy. Avšak pri zapojení obvodu istý čas trvá, kým sa ustali. Tak isto počas nabíjania kondenzátora nim nejaký čas prúď tečie. Keď do odporu zapojíme cievku, tak nejaký čas brzdi prúď v obvode. Všetky tieto javy si na svoj systematicky popis vyžadujú jazyk diferenciálnych rovníc avšak kvalitatívne sa dajú popísať aj na stredoškolskej úrovni.

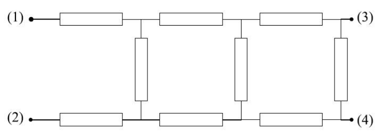
Okrem súčiastok, ktoré sme tu popísali sa do obvodov dajú zapájať polovodičové súčiastky, ktoré svojimi vlastnosťami otvárajú v elektrotechnike dvere nekonečným možnostiam. Na tomto mieste však len spomeňme, že také súčiastky existujú a ich správanie a vlastnosti sú veľmi široké a vcelku náročné témy.

A na úplný zaver pripomeňme, že obvodmi môžu tiecť prúdy striedavé, ktorých možnosti na teoretické štúdium a praktické využitie ďaleko presahujú jednosmerný prúd.

A ak sa nájde niekto, kto už všetky príklady vypočítal a málilo sa mu, na zaver niekoľko ozaj výnimočných príkladov.

Príklad 77. Nájdite zapojenie, zložené s rezistorov s odporom $1\,\Omega$, ktorého odpor sa od numerickej hodnoty čísla π líši o menej ako $0,00001\,\Omega$. Vymyslite takéto zapojenie z čo najmenšieho poctu rezistorov.

Príklad 78. Zoberiem $3n$ odporov, vyrobím z nich n zapojení v tvare písmena U a zapojím ich za seba. Na obrázku je zapojenie pre $n = 3$. Teraz vodivo spojím body 1 a 3 a body 2 a 4, čím dostaneme valec odporov. Aký je odpor medzi bodmi 1 a 2? Potom vodivo spojíme body 1-4 a 2-3, čím vznikne Mobiov pásik odporov. Aký bude medzi bodmi 1 a 2 odpor teraz? Výsledky vypočítajte pre všeobecné n.



Príklad 79. Predstavte si, že pred sebou mate 11 rezistorov. Z nich ma desať odpor $10\,\Omega$, jeden (chybný) ma veľkosť $30\,\Omega$. Najmenej koľkými meraniami ste zaručene schopní nájsť medzi rezistormi ten, ktorého odpor je väčší? Prečo je tento počet meraní minimálny?

9 Použitá a odporúčaná literatúra

- Zbierky riešených úloh Náboja FKS, 1999 az 2013

- Zbierka riešených úloh FX, 1. a 3. rocnik
- Zbierky riešených úloh Fyziklani Fykosu 2011 az 2014
- Archív úloh Fyzikálnej Olympiády
- Študijné texty českej FO - Miroslava Jaresova, ELEKTRICKE OBVODY (Stejnosmerný proud)
- Andrej Tirpák - Elektromagnetizmus