Poruchové výpočty
(na príklade odporu vzduchu a matematického kyvadla)

Juraj Tekel
Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
FMFI UK
Mlynská Dolina
842 48 Bratislava

juraj(a)tekel(b)gmail(c)com
http://fks.sk/~juro/ind_physics.html

Aktualizované 29. septembra 2017

Text o poruchovej metóde, t.j. nástroji na analýzu malých efektov, ktoré nevieme započítať úplne presne. Po krátkom úvode sa pozrieme na dva konkrétne príklady, a to odpor vzduchu pri voľnom páde a väčšie výchylky v prípade matematického kyvadla. Text by mal byť prístupný začínajúcim vysokoškolákom a jeho väčšia časť aj šikovnejším (a naštudovanejším) stredoškolákom. Objavujú sa v ňom derivácie. Okrem samotnej poruchovej metódy sa v ňom vyskytuje veľa užitočných technických postupov, ktoré je dobré ovládať a ktoré sa tu dajú naučiť alebo upevniť.

Obsah

1 Úvod

1.1 Úvod k úvodu - matematické dolaďovačky a označenia

Skôr ako sa do čohokoľvek pustíme, zhrňme si čo z matematických vedomostí pre nás bude potrebné a predstavme si používané označenia.

Označenia

Text sa skladá z veľa príkladov, ktoré majú často aj úplne riešenie alebo aspoň výsledok. Zadanie príkladu sa končí prázdnym štvorčekom, riešenie alebo výsledok príkladu sa končí plným štvorčekom.

Príklad 1.1. Nájdite miesto, kde sa načína ďalší text. □

Riešenie. Tam, kde bol na pravej strane biely štvorček. Toto riešenie sa končí tam, kde je na pravej strane čierny štvorček. ■

Ako býva zvykom, časové derivácie označujeme bodkou

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} \ , \ \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2} \ . \tag{1.1}$$

Malé veličiny budeme štandardne označovať ε.

A budeme mať jedno neštandardné označenie. Budeme písať

$$x \to \text{niečo} \ . \tag{1.2}$$

Tým budeme mať na mysli, že za veličinu x skúsime do rovníc, ktoré pre ňu platia dosadiť niečo a budeme ďalej počítať.

Derivovanie

V texte budeme derivovať. Je teda dobré vedieť derivovať, aj keď po technickej stránke sa zaobídeme iba s derivovaním polynómu

$$\frac{dx^n}{dx} = n\, x^{n-1} \tag{1.3}$$

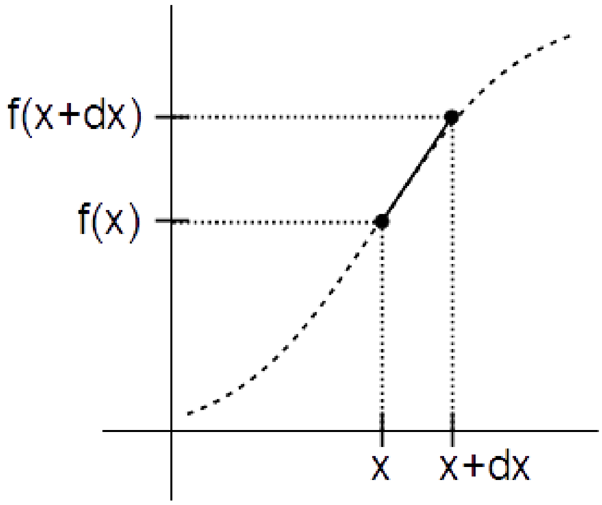
a inverzným vzorcom

$$\int dx\, x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ . \tag{1.4}$$

Za deriváciou je však dobré mať predstavu prírastu k funkcií pri malej zmene parametra. To znamená, že ak máme funkciu f, ktorej hodnota je v x je $f(x)$, tak potom jej hodnota v mieste $x + dx$ je pre veľmi malé x na nerozoznanie od

$$f(x + dx) \approx f(x) + \frac{df}{dx} dx \ . \tag{1.5}$$

Tu netreba df/dx chápať ako zlomok dvoch vecí, ale ako jeden hieroglyf, ktorý je daný funkciou f. Označenie $\approx$ tu znamená presne to čo je napísané. Že nejde o presnú rovnosť, ale pre rozumné hodnoty parametra je pravá a ľavá strana na nerozoznanie.



Príklad 1.2. Pre $f(x) = x^n$ už deriváciu poznáme. Ak zoberieme $x = 1$ dostávame

$$(1 + dx)^n \approx 1 + ndx \ . \tag{1.6}$$

V prvom rade si rozmyslite, že sme vlastne spravili binomický rozvoj zátvorky a zahodili všetky členy okrem prvých dvoch. V druhom rade zvoľte hodnoty dx postupne od veľmi malých až po väčšie a sledujte, ako sa mení hodnota oboch strán tejto "rovnice". □

Po fyzikálnej stránke budeme potrebovať vedieť, že rýchlosť je deriváciou polohy a polohu vieme z rýchlosti dostať integrovaním

$$v(t) = \dot{x}(t) \ , \ x(t) = \int_0^t dt\, v(t) \ . \tag{1.7}$$

1.2 A už ozaj úvod

Budeme sa zaoberať situáciami, kedy budeme vedieť rozdeliť náš problém na "veľkýëfekt a "malýëfekt. A situáciu s veľkým efektom budeme vedieť vyriešiť úplne. Ukážeme si, ako v takom prípade budeme vedieť započítať malý efekt, síce nie úplne presne, ale aspoň trochu. To je dobré vtedy, keď úplný problém riešiť nevieme a chceme aspoň nejak zachytiť vplyv malého efektu. Alebo to môže byť dobré vtedy, keď nás zaujíma výsledok len do istej presnosti a úplné riešenie problému teda vedieť nepotrebujeme.

Skôr ako budeme počítať fyziku a derivovať pozrime sa na veľmi jednoduchý príklad celej tejto idey. Majme rovnicu

$$x^2 + \varepsilon x - 1 = 0 \ , \tag{1.8}$$

kde ε je malý parameter, oveľa menší ako 1.[1] Takúto rovnicu samozrejme vieme vyriešiť, výsledok je

$$x^{\pm} = \frac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2} \ . \tag{1.9}$$

Nás ale bude zaujímať iná otázka. Keby v rovnici (1.8) nebol druhý člen, tj. v prípade $\varepsilon = 0$, rovnica má triviálne riešenie $x_0^{\pm} = \pm 1$. Ak je ε dostatočne malé, môžeme sa skúsiť zamyslieť nad tým, ako

[1] Ak nie je jasné, skúste si na začiatok namiesto ε predstaviť 0.001.

prítomnosť členu εx zmení toto riešenie. Idea bude napísať nové riešenie ako

$$x \to x_0 + \varepsilon x_1 \ , \tag{1.10}$$

kde x_0 je staré riešenie a x_1 je zmena, ktorú v ňom extra člen spôsobí. Všimnite si, ako sme pred nové riešenie napísali faktor ε, čo viac menej hovorí, že "malý člen spôsobí malú zmenu". Dosadíme a po úpravách dostaneme

$$\left(x_0^2 - 1\right) + \varepsilon \left(x_0 + 2x_0 x_1\right) + \varepsilon^2 \left(x_1 + x_1^2\right) = 0 \ . \tag{1.11}$$

V rovnici sme sugestívne pozbierali dohromady členy obsahujúce rovnakú mocninu ε. Kľúčovou úvahou teraz pre nás bude, že budeme požadovať aby sa každá zátvorka rovnala nule osobitne. Ak je ε ozaj veľmi malé, jednotlivé členy v rovnici budú mať veľmi rôznu hodnotu. Nemajú teda šancu navzájom sa odčítať a jediný spôsob ako splniť rovnicu je nulovosť každého z nich.

Iná úvaha s tým istým koncom znie nasledovne. ε je parameter a jeho hodnotu môžeme ľubovoľne meniť. Rovnica musí platiť pre všetky hodnoty parametra, ale nakoľko ho $x_{0,1}$ neobsahujú, musia byť nulové všetky členy osobitne.

Prvá skupina členov bez ε je pôvodná rovnica ktorej riešenie poznáme.

Pozrieme sa na druhú skupinu členov a teda riešime rovnicu

$$x_0 + 2x_0 x_1 = 0 \ . \tag{1.12}$$

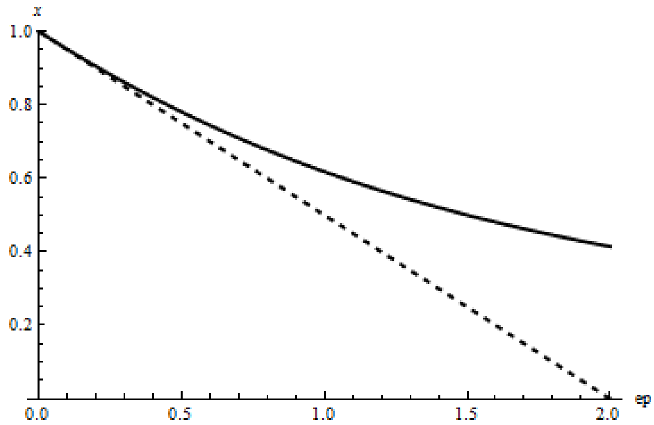
Tá nám veľmi ochotne prezradí, že

$$x_1 = -\frac{1}{2} \ , \tag{1.13}$$

bez ohľadu na to, čomu sa rovná x_0. Dostali sme teda $x = 1 - \varepsilon/2$ a pred tým, ako si povieme čo s treťou zátvorkou v (1.11) porovnáme tento výsledok s presným výsledkom (1.9).

$$\begin{array}{lll}
\varepsilon = 0.00001 & x^+ = 0.9999950000 & x_0^+ + \varepsilon x_1 = 0.9999950000 \\
\varepsilon = 0.0001 & x^+ = 0.9999500012 & x_0^+ + \varepsilon x_1 = 0.9999500000 \\
\varepsilon = 0.001 & x^+ = 0.9995001250 & x_0^+ + \varepsilon x_1 = 0.9995000000 \\
\varepsilon = 0.01 & x^+ = 0.9950124999 & x_0^+ + \varepsilon x_1 = 0.9950000000 \\
\varepsilon = 0.1 & x^+ = 0.9512492197 & x_0^+ + \varepsilon x_1 = 0.9500000000 \\
\varepsilon = 1 & x^+ = 0.6180339887 & x_0^+ + \varepsilon x_1 = 0.5000000000 \\
\varepsilon = 2 & x^+ = 0.4142135624 & x_0^+ + \varepsilon x_1 = 0
\end{array} \tag{1.14}$$

Vidíme, ako sa postupne efekt členu εx zväčšuje.



Na obrázku je plnou čiarou naznačený presný výsledok x^+, čiarkovaná je čiara $x_0^+ + \varepsilon x_1$.

Optimizmus nás ale prejde keď sa pozrieme na tretí člen v (1.11). Podľa toho čo sme povedali má byť zátvorka nulová, čo je ale v spore s (1.13). Ako to teda je? Kľúčová je druhý mocnina parametra ε. Všimnite si, že tvar hľadaného riešenia (1.10) sme písali iba s členom s druhou mocninou.

Aby sme situáciu zachránili, musíme zmeniť (1.10) a napísať

$$x \to x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 \ . \tag{1.15}$$

Na rovniciach pre x_0 a x_1 sa nič nezmení (overte ako príklad), ale členy pri ε^2 dajú rovnicu pre x_2, konkrétne

$$x_1 + x_1^2 + 2x_0 x_2 = 0 \ . \tag{1.16}$$

Vidíme, že tu už riešenie x_2 závisí od predchádzajúcich riešení $x_{0,1}$.

Príklad 1.3. Dotiahnite všetky výpočty do konca a overte, že nové riešenie je presnejšie. O koľko? □

Výsledok.

$$\varepsilon = 2 \quad x = 0.414 \quad x_0 + \varepsilon x_1 = 0 \quad x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 = 0.5 \ . \tag{1.17}$$

■

Príklad 1.4. Overte, že keď na výsledok (1.9) použijeme rozvoj odmocniny podľa (1.5), dostaneme výsledok v tvare (1.15) s rovnakými $x_{0,1,2}$ ako nám dali poruchové výpočty. □

Podobné situácie budeme teda riešiť tak, že ak na začiatku napíšeme riešenie iba s prvou mocninou, všetky členy s vyššími mocninami budeme zahadzovať. Podobne s druhou mocninou.

Na záver už len trochu názvoslovia, dva príklady a môžeme sa pustiť do fyziky. x_0 budeme nazývať neporušené riešenie, x_1 prvou (poruchovou) opravou, x_2 druhou opravou. Budeme potom hovoriť, že rovnicu riešime do prvého, resp. druhého rádu.

Príklad 1.5. Vypočítajte prvú a druhú opravu k riešeniu $x_0 = 1$ rovnice

$$x^n + \varepsilon x - 1 = 0 \ , \ n > 2 \ . \tag{1.18}$$

□

Príklad 1.6. Vypočítajte prvú a druhú opravu k riešeniu $x_0 = 1$ rovnice

$$x + \varepsilon x^n - 1 = 0 \ , \ \ n \geq 2 \ . \tag{1.19}$$

□

2 Odpor vzduchu ako malá porucha

2.1 Úvod

Hneď na začiatku si zadefinujme nás problém. Otázkou je, ako bude padať kameň hmotnosti m, ak ho v homogénnom gravitačnom poli g za prítomnosti vzduchu pustime z výšky H.

Označme výšku, v ktorej sa kameň nachádza v čase t po pustení ako $h(t)$. Potom zjavne zo zadania

$$h(0) = H \ , \ \dot{h}(0) = 0 \ . \tag{2.1}$$

Počas pádu budú na kameň pôsobiť dve sily. Gravitačná sila a odporová sila. Pre odporovú silu budeme predpokladať, že pôsobí proti pohybu kameňa a je úmerná rýchlosti, ktorú kameň ma.[2] Pohyb kameňa potom popisuje spolu s predchádzajúcimi počiatočnými podmienkami nasledujúca pohybová rovnica ($F = ma$)

$$m\ddot{h} = -mg - \kappa\dot{h} \ . \tag{2.2}$$

Ako vidime nepojde uz o jednoduchy rovnomerne zrychleny pohyb a riesenie tejto rovnice si vyzaduje "vyssiu"matematiku, v ktorej treba vedieť narábať s deriváciami a integrálmi komplikovanejšieho typu. V nasledujucej casti si ale ukazeme, ako sa da k nejakemu rozumnemu vysledku dojst aj bez presneho vyriesenia tejto rovnice a iba s derivovavím a integrovaním mocninných funkcií.

Tu bude klucovym pozorovanie, ze odporova sila je za rozumnych podmienok velmi mala v porovnani s gravitacnou. Poriadne si rozmyslime co to presne znamena a ako sa to da pouzit.

Nakoniec rovnicu predsa len vyriesime, a to hned dva krat. Najskor modifikaciou priblizneho postupu a potom spominanou "vyssou"matematikou.

2.2 Poruchová metóda a prva oprava

Idea poruchovej metody je aj v tomto pripadne vcelku jednoducha. Bez odporovej sily vieme hned a zaraz rovnicu (3.1) vyriesit

$$h(t) = H - \frac{1}{2}gt^2 \ . \tag{2.3}$$

Ako sme spomenuli v uvode, odporova sila je za normanych okolnosti ovela mensia ako gravitacna a preto ocakavame, ze skutocne riesenie nebude len malo odlisne od riesenia bez odporu. Sucastou fyzikalneho folkoru je konstatovanie, ze odporova sila je poruchou gravitacnej a mierne porusi riesenie, ktore berie do uvahy iba ju.

Zdravy rozum hovori, ze tomu bude tak, ked bude kamen velmi tazky a vzduch velmi riedky. Inak povedane ked bude κ/m velmi male cislo. Tu sa ideme dopustit jednej (vcelku velkej) nedoslednosti, o ktorej budeme hovorit za obzorom tychto poznamok. Tu len zdorazimne ze tento vyraz má rozmer a preto hovorit o tom, ci je maly alebo velky nie je uplne spravne.

[2]Tu sa treba na chvíľu zastaviť. Skutočná odporová sila vo vzduchu je oveľa lepšie popísaná silou ktorá je úmerná druhej mocnine rýchlosti. Avšak počítať s ňou je oveľa ťažšie a tak z didaktických dôvodov používame tento lineárny model odporu vzduchu. K tomu reálnejšiemu sa dostaneme za obzorom týchto poznámok.

Oznacme, ako uz byva zvykom, nase male cislo ε. Riesime teda rovnicu

$$\ddot{h} = -g - \varepsilon \dot{h} \ . \tag{2.4}$$

Riesenie tejto rovnice budeme hladat v tvare

$$h \rightarrow h_0 + \varepsilon h_1 \ . \tag{2.5}$$

Keďže ide o diferenciálnu rovnicu, potrebujeme vedieť aj derivácie tohto výrazu. Ale nakoľko ε nezávisí od času, môžme smelo písať

$$\dot{h} \rightarrow \dot{h}_0 + \varepsilon \dot{h}_1 \ . \tag{2.6}$$

$$\ddot{h} \rightarrow \ddot{h}_0 + \varepsilon \ddot{h}_1 \ , \tag{2.7}$$

kde h_0 ani h_1 neobsahuju nijak ε. Riesenie sme teda rozdelili na dve casti, ako sme reklamovali v uvode. Neporusenu cast h_0 a cast, ktora je opravou sposobenou prítomnosťou odporovej sily h_1. To, ze ide o malu opravu je zdorazenne tym, ze je umerna ε. Dosadenim do rovnice (2.4) dostavame

$$\left(\ddot{h}_0 + g\right) + \varepsilon \left(\ddot{h}_1 + \dot{h}_0\right) = 0 \ , \tag{2.8}$$

pričom sme opäť odhodili člen, pred ktorým stálo ε^2. A klucovou uvahou je opäť fakt, ze tato rovnica musi platit bez ohladu na hodnotu parametra ε. Po fyzikalnej stranke to znamena asi tolko, ze tato rovnica popisuje vsetky kamene, ktore mozme zhodit. Dostavame teda nasledujuce dve rovnice

$$\ddot{h}_0 + g = 0 \tag{2.9}$$

$$\ddot{h}_1 + \dot{h}_0 = 0 \ . \tag{2.10}$$

Vyriesit ich je hracka. Najskor vyriesime prvu, ktorej všobecné riešenie je

$$h_0 = -\frac{1}{2} g t^2 + At + B \ . \tag{2.11}$$

Ak uvážime počiatočné podmienk, dostaneme

$$h_0 = H - \frac{1}{2} g t^2 \ . \tag{2.12}$$

kde zme zobrali do uvahy pociatocne podmienky. Nikoho neprekvapuje, ze to je ozaj neporusene riesenie (2.3). Ked toto dosadime do druhej rovnice dostaneme

$$\ddot{h}_1 = gt \tag{2.13}$$

$$\Downarrow$$

$$h_1 = \frac{1}{6} g t^3 \tag{2.14}$$

Tu sme od poruchy pozadovali nulove pociatocne podmienky, nakolko tie uz splna neporusene riesenie. Tieto dva vysledky dohromady davaju

$$h(t) = H - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{6} \frac{\kappa g}{m} t^3 \ . \tag{2.15}$$

Na tomto vysledku si treba vsimnut hned niekolko veci. V provom rade dostali sme clen umerny t^3. To navadza na predstavu, ze sme dostali dalsi clen v rozvoji funkcie $h(t)$ podla mocnin t. Oprava ma kladne znamienko a teda spomaluje zmensovanie h sposobene zapornym clenom umernym t^2.

Kladne znamienko ale znamena aj jeden problem. Ak nechame cas bezat dostatocne dlho, novy clen bude vacsi ako vsetky ostatne a skala nam vyleti vysoko nad miesto, z ktorej sme ju pustili. A to zavana nejakym problemom.

Zdroj problemu je v nasom priblizeni. Faktor κ/m totiz nie uplne charakterizuje velkost odporovej sily. Zohrava tu ulohu aj rychost a poruchová metóda je dobrá vtedy, keď je odporová sila ovela menšia ako tiažová, tj. $\kappa\dot{h} << mg$. Pre velke rychlosti, $\dot{h} \sim mg/\kappa$ moze sposobit problem. Rychlost, ktoru dava nase riesenie je

$$\dot{h} = -gt + \frac{1}{2}\frac{\kappa g}{m}t^2 \ . \tag{2.16}$$

Odporova sila vyrovna tiazovej v case[3]

$$mg = \left| -\kappa gt + \frac{1}{2}\frac{\kappa^2 g}{m}t^2 \right| \ , \tag{2.17}$$

$$t = (1+\sqrt{5})\frac{m}{2\kappa} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{1}{\varepsilon} \ . \tag{2.18}$$

Nase priblizenie bude platit iba pre casy, v ktorych je odporova sila ovela mensia ako gravitacna, teda pre casy ovela mensie ako m/κ. Tu sme aj vyriesili problem, ktory sme na zaciatok zamietli pod koberec. Tymto problemom bola rozmernost parametra κ/m. Nech meriame cas v akychkolvek jednotkach, nase riesenie bude platit pre casy, ktore su ovela mensie ako prevratena hodnota tohto parametra.

Ako bolo spomenute, za obzorom tychto poznamok najdete o cosi formalnejsie vyriesenie tohto problemu. Tu sa uspokojime s tym, ze m/κ je v sekundach zvasa celmi velke cislo, preto je nase problizenie dobre pre velmi vela sekund.

Aby sme lepsie videli, co oprava spravi, vypocitajme cas, za ktory kamen spadne na zem. Z rovnice $h(T) = 0$ dostavame vo vseobecnom pripade cosi velmi skarede, zvolme teda nejake konkretne hodnoty nasich parametrov. Nech $H = 100\,m$ a hmotnost kamena nech je $m = 1\,kg$. Ak polozime $g = 10\,ms^{-2}$, potom pre rozne hodnoty parametra κ dostavame nasledujuce casi dopadu

$$\begin{array}{ll} \kappa = 0 & T_1 = 4.4721 \\ \kappa = 0.001 & T_1 = 4.4754 \\ \kappa = 0.01 & T_1 = 4.5061 \\ \kappa = 0.1 & T_1 = 4.8880 \\ \kappa = 0.2 & T_1 = 5.6706 \\ \kappa = 0.5 & T_1 = NA \end{array} \tag{2.19}$$

Tu NA znamena, ze teleso podla nasej rovnice na zem nespadne. Zdoraznime, ze tieto, rovnako ako vsetky ostatne casi uvedene dalej v texte su iba na styry desatinne miesta a nie su to skutocne hodnoty. Ako sme povedali, nase priblizenie je dobre iba v pripadoch, ked T je ovela mensie ako $m/\kappa = 1/\kappa$.

[3]Absolútna hodnota preto, že nás zaujíma iba veľkosť odporovej sily. Všimnite si, sily sa vyrovnajú až pri ceste kameňa nahor, ktorá je už celkom evidnentne nie je popísaná pôvodnou rovnicou.

Je zrejme, ze to isto su prve dva pripady nenuloveho κ. V pripade $\kappa = 0.1$ je tato hodnota $10\,s$ a pri 5 sekundovom pade sa musime mat na pozore. Ostane dva vysledky su zrejme zle.

Príklad 2.1. Urobte predchadzajuci vypocet pre viac hodnot κ. Hodnoty κ volte tak, aby zmeny v case dopadu boli priblizne rovnake. Co z toho vyplyva? $\square$

V dalsej casti sa pozrieme, ako sa da nase priblizenie spresnit.

2.3 Opravy druheho a vyssich radov

V predchadzajucej casti sme hladali porusene riesenie v tvare $h_0 + \varepsilon h_1$. Uz vieme, ze na spresnenie riesenia je potrebne zobrat riesenie v tvare

$$hrovnicaah_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 \ . \tag{2.20}$$

Znamena to, ze k povodnemu neporusenemu rieseniu hladame opravu, ktora je presnejsia. Rovnakym postupom ako v predchadzajucej casti sa dopracujeme k rovniciam

$$\ddot{h}_0 + g = 0 \tag{2.21}$$
$$\ddot{h}_1 + \dot{h}_0 = 0 \tag{2.22}$$
$$\ddot{h}_2 + \dot{h}_1 = 0 \tag{2.23}$$

Tie opat jednu po druhej vyriesime a dostaneme riesenie

$$h(t) = H - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{6}\frac{\kappa g}{m}t^3 - \frac{1}{24}\left(\frac{\kappa}{m}\right)^2 gt^4 \ . \tag{2.24}$$

Príklad 2.2. Explicitne spravte vsetky vypocty, ktore boli vynechane pri odvodeni predchadzajucich rovnic a ich vyrieseni. $\square$

Opat sa zamyslime, co dalsia oprava priniesla. V prvom rade je umerna t^4, takze opat calsi clen v mocninnom rozvoji $h(t)$. Clen ma zaporne znamienko, teda zmensuje opravu, ktoru sposobil prvy pridany clen. Nemame problem s kamenom, ktory chce vyletiet dohora, nakolko pre velke casi je dolezity clen t^4, ktory je zaporny. Problemom tu vsak je rychlost, ktora v tomto vyraze bude rast do nekonecna (pri dostatocne velkom H). Vieme ale, ze kamen ustali svoju rychlost na mg/κ, pri ktorej sa tiazova sila vyrovna odporovej. Takze ani toto riesenie nebude platit pre lubovolne velky cas. Ak by sme ale chceli dostať čas, pre ktorý je priblíženie dobré, tj. nájsť čas pre ktorý sa odporová sila a gravitačná sila vyrovnajú, dostávame sa do problémov. Dostaneme rovnicu ktorú vieme riešiť iba numericky.

Urobíme teda teraz vypocet podobny, ako viedol k tabulke (2.19), avsak s tymto presnejsim priblizenim a s casmi, kedy sa sily vyrovnajú dopocitanymi numericky (označenýmii malým t).

$$\begin{array}{lllll}
\kappa = 0 & T = 4.4721 & & & \\
\kappa = 0.001 & T_1 = 4.4754 & T_2 = 4.4754 & t_1 = 1618 & t_2 = 1596 \\
\kappa = 0.01 & T_1 = 4.5061 & T_2 = 4.5057 & t_1 = 161.8 & t_2 = 159.6 \\
\kappa = 0.1 & T_1 = 4.8880 & T_2 = 4.8265 & t_1 = 16.18 & t_2 = 15.96 \\
\kappa = 0.2 & T_1 = 5.6706 & T_2 = 5.1849 & t_1 = 8.09 & t_2 = 7.98 \\
\kappa = 0.5 & T_1 = NA & T_2 = 5.3315 & t_1 = 3.23 & t_2 = 3.19
\end{array} \tag{2.25}$$

Diskusiu tychto vysledkov prenechavame na citatela.

Príklad 2.3. Urobte to iste, ako v ulohe 2.1 avsak s tymto presnejsim priblizenim. □

Príklad 2.4. Vypocitajte dalsi clen v crtajucom sa rozvoji. Na to napiste hladane riesenie v tvare

$$h \to h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \varepsilon^3 h_3 \ , \tag{2.26}$$

dosadte ho do rovnice (2.4), najdite rovnicu ktoru splna h_3 a vyrieste ju. Potom zpakujte ulohu 2.1 pre toto priblizenie. □

Výsledok. $h_3 = \frac{1}{120}\left(\frac{\kappa}{m}\right)^3 g t^5$. ■

V opravach sa nam zacina crtat ista pravidelnost. Jedneho by napadlo, ze mozno by sa dala vypocitat vseobecne oprava n-teho radu h_n. A potom by sa mozno dali tieto opravy scitat a dostat presne riesenie. A jeden by mal pravdu.

2.4 Opravy vsetkych radov a uplne riesenie

V tejto casti si ukazeme, ako sa da rovnica (2.4) vyriesit uplne pouzitim poruchoveho poctu. Z predvhadzajucich casti by sa toto mohlo dat spravit aj samostatne. Preto sa skuste chvilu potrapit sami a text dalej citat az potom.

Riesenie rovnice (3.1) budeme teda hladat v nasledujucom tvare

$$h = h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \varepsilon^3 h_3 + \varepsilon^4 h_4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_n \ . \tag{2.27}$$

Pre derivacie tohto vyrazu plati

$$\dot{h} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \dot{h}_n \tag{2.28}$$

$$\ddot{h} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \ddot{h}_n \tag{2.29}$$

Toto dosadime do riesenej rovnice a dostaneme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \ddot{h}_n &= -\, g - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} \dot{h}_n \ , \\
\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \ddot{h}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \dot{h}_{n-1} + g &= 0 \ , \\
\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \left(\ddot{h}_n + \dot{h}_{n-1} \right) + \ddot{h}_0 + g &= 0 \ .
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Z tejto rovnice dostavame za podmienky, ze plati pre lubovolnu hodnotu parametra ε nasledujucu rekurentnu diferencialnu rovnicu[4]

$$\ddot{h}_n = -\dot{h}_{n-1} \tag{2.31}$$

[4] V predchadzajucich castiach sme to az tak nezdoraznovali, ale tu sa uz naplno ukazala tato poziadavka klucova. Rovnice (2.31) su postacujuce, ale nie nutne pre platnost rovnice (2.30). Nutnym dosledkom a teda aj riesenim su iba za predpokladu, ze rovnica plati pre lubovolne ε.

a podmienku pre prvy clen

$$\ddot{h}_0 + g = 0\ . \tag{2.32}$$

Tuto podmienku sme uz vyriesili a spolu s pociatocnymi podmienkami ulohy je jej riesenie uz notoricky zname. Ostava uz len vyriesit rekuretny rad. To nebude az taky problem, nakolko ked rovnicu este raz poderivujeme podla casu (pre nedostatok bodiek budeme oznacovat derivacie vyssieho radu ako druheho hornym idnexom v zatvorke)

$$h_n^{(3)} = -\ddot{h}_{n-1} = \dot{h}_{n-2}\ . \tag{2.33}$$

Takto postupne dostavame

$$h_n^{(k+1)} = (-1)^k \dot{h}_{n-k} \tag{2.34}$$

a teda

$$h_n^{(n+1)} = (-1)^n \dot{h}_0 = -(-1)^n g t\ . \tag{2.35}$$

Tuto rovnicu uz vieme integrovat a vysledok je

$$h_n = -(-1)^n g \frac{t^{n+2}}{(n+2)!}\ . \tag{2.36}$$

Tu sme vsetky integracne konstanty rovno polozili nulove, nakolko pociatocne podmienky su uz splnene riesenim h_0. Mozme teda pisat uplne riesenie nasej rovnice

$$h(t) = H - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n (-1)^n g \frac{t^{n+2}}{(n+2)!}\ , \tag{2.37}$$

ktore uz len trochu pomasirujeme do pekneho tvaru

$$\begin{aligned} h(t) =& H - \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{n-2} (-1)^n g \frac{t^n}{n!} = H - \frac{g}{\varepsilon^2}\left[\sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n (-1)^n \frac{t^n}{n!} - \varepsilon(-1)t - 1 + \varepsilon(-1)t + 1\right] = \\ =& H - \frac{g}{\varepsilon^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\varepsilon t)^n}{n!} + \varepsilon t - 1\right] = H - \frac{g}{\varepsilon^2}\left[e^{-\varepsilon t} + \varepsilon t - 1\right]\ . \end{aligned} \tag{2.38}$$

Tu sme si pomohli vzťahom (2.58) spoza obzora týchto poznámok. Ostava uz len dosadit za ε a dostavame presne riesenie pre pohyb kamena v odporovom prostredi

$$h(t) = H - \frac{m^2 g}{\kappa^2}\left[\frac{\kappa}{m} t - 1 + e^{-\frac{\kappa}{m} t}\right]\ . \tag{2.39}$$

Vsimnite si, ze v tomto vysledku treba pripad bez odporu robit velmi opatrne a nemozme len tak polozit $\kappa = 0$, stačí však poctivo vypočítať takúto limitu.

Pre porovnanie s pribliznymi vysledkami su v nasledujucej tabulke uvedene casi dopadu pre uz pouzite hodnoty velicin.

$$\begin{array}{llll} \kappa = 0 & T_1 = 4.4721 & & \\ \kappa = 0.001 & T_1 = 4.4754 & T_2 = 4.4754 & T_\infty = 4.4754 \\ \kappa = 0.01 & T_1 = 4.5061 & T_2 = 4.5057 & T_\infty = 4.5057 \\ \kappa = 0.1 & T_1 = 4.8880 & T_2 = 4.8265 & T_\infty = 4.8318 \\ \kappa = 0.2 & T_1 = 5.6706 & T_2 = 5.1849 & T_\infty = 5.2504 \\ \kappa = 0.5 & T_1 = NA & T_2 = 5.3315 & T_\infty = 6.9376 \end{array} \tag{2.40}$$

Diskusiu vysledkov nechavame na citatela, rovnako ako nasledujucu, vcelku ocakavanu ulohu

Príklad 2.5. Pre hodnoty κ, ktore ste pouzili v ulohach 2.1,2.3 a 2.4 vypocitajte skutocny cas dopadu a porovnajte. $\square$

Príklad 2.6. Vyrieste kvadraticku rovnicu (1.8) poruchovo do všetkých rádov a ukazte, ze dostanete riesenie v znamom tvare (1.9). $\square$

2.5 Uplne riesenie neporuchovo

Ukazeme si, ako sa dala vyriesit diferencialna rovnica (2.4) bez pouzitia poruchoveho poctu, priamo. Na riesenie diferencialnych rovnci existuje niekolko roznych sposobom, my si ukazeme ten najmenej rigorozny, avsak v tomto pripadne velmi pekne fyzikalne motivovany.

Najskor prepiseme rovnicu pomocou rychlosti $v = \dot{h}$ na

$$\dot{v} = -g - \varepsilon v \ . \tag{2.41}$$

Ako sme uz povedali, rychlost kamena bude postupne rast (do zaporneho smeru) az sa ustali na hodnote mg/κ. Kedze derivacia rychlosti ma byt nejakym sposobom umerna samotnej rychlosti, spomenieme si na exponencialu a po troche skusania[5] nas napadne nasledujuce riesenie[6]

$$v = -\frac{mg}{\kappa}(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}) \ . \tag{2.43}$$

O nom sa lahko dosadenim presvedcime, ze skutocne splna rovnicu pre v. Teraz uz len ostava vypocitat h, co nebude najmensi problem.

$$h(t) = \int dt\, v + K = K - \frac{mg}{\kappa}\left(t + \frac{e^{-\frac{\kappa}{m}t}}{\frac{\kappa}{m}}\right) \ . \tag{2.44}$$

Z podmienky $h(0) = H$ dostavame

$$H = K - \frac{m^2 g}{\kappa^2}. \tag{2.45}$$

A teda riesenie v tvare

$$h(t) = H - \frac{mg}{\kappa}\left[t - \frac{m}{\kappa}\left(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}\right)\right] \ . \tag{2.46}$$

Nikoho neprekvapuje ze to je rovnake riesenie, ako sme dostali v predchadzajucej casti.

2.6 Za obzorom tychto poznamok

Rozmernosť malého parametra

Tu splatme jeden dlh, ktory sme si nechali v texte. Nim je rozmernost parametra κ/m. V texte sme ho vyriesili tym, ze sme povedali ze nase priblizenie plati iba pre casy ovela mensie ako prevratena hodnota tohto parametra.

[5] Napíšeme rýchlosť v tvare $v = A + Be^{Ct}$, poderivujeme a dorobíme konštanty tak, aby to sedelo.

[6] K tomuto sa da prist priamo separaciou rovnice na

$$\frac{dv}{g + \varepsilon v} = dt \ . \tag{2.42}$$

a integrovanim.

Tu pristupime k problemu o cosi korektnejsie.

Rovnicu (3.1) sa pokusime uplne zbavit vsetkych rozmerov. Na to zavedieme nove, bezrozmerne premmenne

$$
\begin{aligned}
y =& \frac{h}{L} \ , \qquad (2.47)\\
\tau =& \frac{t}{T} \ , \qquad (2.48)
\end{aligned}
$$

kde L a T su nejake konstantny rozmeru meter a sekunda. Ak tieto hodnoty zvolime tak, aby bezrozmerne parametre boli radu 1, potom ide o charakteristicke hodnoty velicin v nasom probleme. Kedze g je prevodnikom medzi velicinami rozmueru meter a sekunda, zvolime $L/T^2 = g$.

Pre nove premenne y, τ plati

$$dh = Ldy \ , \ dt = Td\tau \ . \qquad (2.49)$$

Potom

$$\dot{h} = \frac{L}{T}y' \ , \ \ddot{h} = \frac{L}{T^2}y'' \ . \qquad (2.50)$$

kde sme ciarkou oznacili derivaciu podla parametra τ. Rovnica (3.1) potom prejde v novych premennych do tvaru

$$
\begin{aligned}
\frac{L}{T^2}y'' =& - g - \frac{\kappa L}{mT}y' \ , \\
y'' =& - \frac{T^2 g}{L} - \frac{\kappa}{m}Ty' \ , \\
y'' =& - 1 - \frac{T}{T_0}y' = -1 - \varepsilon y' \ . \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

Tu sme zaviedli oznacenie

$$T_0 = \frac{m}{\kappa} \ . \qquad (2.52)$$

A teraz to mame cele cierne na bielom. Odporovy clen je (teraz uz objektivne) maly ak je pomer T/T_0 maly. Dostali sme sa teda k rovnakemu vysledku ako predtym, a to ze poruchovu metodu mozme pouzit pre casy ovela mensie ako m/κ, tentoraz vsak ovela jednoduchsie a priamociarejsie.

Príklad 2.7. Poruchovo vyrieste rovnciu (2.51). Zopakujte teda postup z textu, kde najskor budete hladat len niekolko najnizzsich oprav k rieseniu a az neskor najdete uplne riesenie. Presvedcte sa, ze po navrate k rozmernym premmennym h, t budu vysledky rovnake. □

Kvadratický odpor

Ako sme už povedali, vo vzduchu je odpor prostredia ovela lepsie dany druhou mocninou rychlosti a nie prvou. Teraz, ked uz porochovo pocitame jedna radost, mozme sa pokusit vypocitat aj realistickejsi pripad.

Príklad 2.8. Vypocitajte opravu k padu kamena v pripade odporovej sily danej vztahom γv^2. Presvedcte sa, ze v takomto pripade nie je dolezity cas, ktory sa kamen pohybuje ale vzdialenost, ktoru urazi. Vypocitajte niekolko najnizsich oprav a potom porovnajte s presnym vysledkom, ktory je dany v bezrozmernych premennych naslujucim vztahom (mozte ho skusit odvodid, nie je to az take tazke)

$$y(\tau) = \frac{H}{L} - \frac{1}{\varepsilon} \log\left(\cosh(\sqrt{\varepsilon}\tau)\right)$$

□

Výsledok. Mali by ste sa dopracovať k rovnici

$$y'' = -1 + \varepsilon\left(y'\right)^2 \ , \ \varepsilon = \frac{\gamma L}{m} \ . \tag{2.53}$$

Jej poruchové riešenie je potom do druhého rádu

$$y(\tau) = \frac{H}{L} - \frac{1}{2}\tau^2 + \varepsilon\frac{1}{12}\tau^4 - \varepsilon^2\frac{1}{45}\tau^6 \ . \tag{2.54}$$

■

Taylorov rozvoj

Prvou deriváciou sa priblíženie funkcií nekončí. Mohli by sme sa spýtať, ako spresniť približnú rovnosť

$$f(x + dx) \approx f(x) + \frac{df}{dx}dx \ . \tag{2.55}$$

To je užitočné napríklad vtedy, keď dx nie je až také malé a priblíženie grafu funkcie priamkou už nie je dostatočne dobré. Bez dlhých rečí napíšeme riešenie

$$f(x + dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) dx^n \ . \tag{2.56}$$

Tu robíme predpoklady o tom, že funkcia f je dostatočne slušná, derivácie existujú a podobne. Dôkaz nie je ťažký.

Príklad 2.9. Zapíšte rozvoj funkcie v tvare

$$f(x + dx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n dx^n \ . \tag{2.57}$$

a túto rovnosť k-krát derivujte podľa dx. Pravá aj ľava strana sú funkcie dx takže by sa to malo bez problémov dať. Rovnosť má platiť pre všetky hodnoty parametrov, takže aj pre $dx = 0$. Z toho by ste mali prísť k hodnote a_n. □

Príklad 2.10. Rozvinte exponencialu v tomto vysledku (2.46) do radu a presvedcte sa, ze poruchove opravy ktore sme dostali predtym su ozaj clenmy rozvoja $h(t)$ v mocninach t. □

Príklad 2.11. Na základe toho ukážte, že

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ , \tag{2.58}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ , \tag{2.59}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ . \tag{2.60}$$

□

Príklad 2.12. Rozmyslite si, že poruchová metóda je vlastne hladanie členov takéhoto rozvoja. Výsledok totiž závisí od parametra ε a my postupne identifikujeme členy v rozvoji

$$x(\ldots,\varepsilon) = x_0(\ldots,0) + x_1(\ldots,0)\varepsilon + \ldots \ . \tag{2.61}$$

□

Niekoľko ďalších úloh

Pred daslim prikladom pride kratky rychlokurz pohybu v centralnom potencialy $1/r$.

Vieme, ze v centralnom potencialy sa zachovava moment hybnosti, takze pohyb bude v rovine. Ak v tejto rovine zavedieme polarne suradnice (r, φ), potom v nich vyzeraju pohybove rovnice nasledovne

$$m(\ddot{r} - r\ddot{\varphi}) = -\frac{k}{r^2} \tag{2.62}$$

$$mr^2\dot{\varphi} = K \tag{2.63}$$

kde K je celkovy moment hybnosti telesa. Bystre fyzikalne oko[7] spoznava v druhom clene v zatvroke odstredivu silu. Kombinaciou tychto dvoch rovnic dostavame

$$m\ddot{r} = \frac{K^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2} \ . \tag{2.64}$$

Zavedieme suradnicu u danu vztahom $r = 1/u$. Pre nu dostavame

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\dot{u} = -r^2\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{K}{m}\frac{du}{d\varphi} \ . \tag{2.65}$$

Podobne dostaneme

$$\ddot{r} = -u^2\left(\frac{K}{m}\right)^2\frac{d^2u}{d\varphi^2} \ . \tag{2.66}$$

Dosedenim do pohybovej rovnice dostavame

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -u + \frac{km^2}{K^2} \ . \tag{2.67}$$

[7] U pravakov lave, u lavakou prave.

Vidime, ze v suradnici u kona teleso harmonicky pohyb okolo nenulovej rovnovaznej polohy. Tiez vidime, ze uhlova rychlost tohto kmitania je 1, takze jeho perioda je 2π. To znamena ze ked sa φ zmeni o 2π, suradnica u sa vrati do povodnej polohy. Je uz len na dobrom premysleni uvedomit si, ze toto znamena uzavretost obeznych drah. Tak isto je uz len na vhodnom zapisani riesenia tejto rovnice dostat nasleduje riesenie

$$r(\varphi) = \frac{\frac{K^2}{km^2}}{1 - e\cos\varphi} \ , \tag{2.68}$$

kde e je dane pociatocnymi podmienkami a pre $e < 1$ ide o elipsu. A moze prist samotny priklkad

Príklad 2.13. Do pohybovej rovnice pre teleso v centralnom poli pridajte okrem Newtonovje gravtacnej sily clen C/r^3.[8] Za akych podmienok mozme tento clen zobrat velmi malym a rovnicu riesit poruchovo? Vyrieste novu pohybovu rovnicu

$$m\ddot{r} = \frac{K^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2} - \frac{C}{r^3} \ . \tag{2.69}$$

a najdite prvu opravu k rieseniu (2.68). Ukazte, ze toto riesenie zodpoveda stacaniu perihelia, tj. ze po prejdeni φ o 2π neprejde r na tu istu hodnotu. Zistie hodnoty parametrov K, m, e pre planetu Merkur v gravitacnom poli Slnka a vypocitajte, o kolko sa posunie prerihelium, tj. poloha, kde r dosiahne tu istu hodnotu. Porovnajte svoj vypocet s nameranymi udajmi. □

Výsledok. $\Delta\varphi = \frac{\pi C m}{K^2}$. ■

Na zaver uz len poznamenajme, ze poruchova metoda ma nekonecne pouzite vo vsetkcyh oblastiach fyziky. Vzdy tam, kde nevieme vypocitat presne riesenie, avsak da sa izolovat efekt, bez ktoreho vieme riesenie najst a navyse tento efekt je (v nejakom zmysle) velmi maly. Je dolezite ale poznamenat, ze nie vsetky rovnice sa daju uplne vyriesit poruchovo tak, ako ta v tomto texte. Preto nie vsetky efekty, ktore vo svete vidime su dostupne poruchovym poctom.

Príklad 2.14. V tomto príklade treba vedieť robiť limity. Majme funkciu

$$f(\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}} \ . \tag{2.70}$$

Ukážte, že všetky jej derivácie v mieste $\varepsilon = 0$ sú nulové. To znamená, že aproximácia Taylorovim radom (2.56) dá $f(\varepsilon) = 0$ aj pre nenulové ε a to bez ohľadu na to, koľko členov v rozvoji zoberieme. Rozmyslite si, že to znamená, že ak by sme sa podujali hľadať funkciu poruchovo, sme odsúdení na zlyhanie masívneho charakteru. □

Návod. Príklad 2.12.

No a na uplny zaver niekolko dalsich, o cosi tazsich uloh.

Príklad 2.15. Matematicke kyvadlo je popisane rovnicou $\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin\varphi$. Standardne sa zoberie $\sin\varphi \approx \varphi$ a rovnica prejde na jednoduchy harmonicky pohyb. Zoberte lepsiu aproximaciu $\sin\varphi \approx \varphi - \varphi^3/6$. Pre male vychylky je druhy clen ovela mensi ako prvy a preto ho mozno povazovat za poruchu. Najdite pohyb matematickeho kyvadla a opravu k periode do prveho radu v tejto poruche. □

[8]Napriklad moze ist o posobenie inych telies, ktore obiehaju v tom istom poli.

Návod. Nie je ziadny pekny parameter na rozvoj? Jednoducho pripiste ε pred poruchuovy clen, urobte vsetko ako treba a na zaver polozte $\varepsilon = 1$. Viac korektny sposob je prejst k bezormernej premennej $\tau = \omega t$ a preskalovat vychylku na $x = \varphi/\varphi_0$ a cudovat sa, ako rozumny maly parameter sam od seba vyskoci.

Príklad 2.16. Vypocitajte, ako daleko od zvysleho miesta dopadu sa nasa skala z textu odchyli posobenim Coriollisovej sily, pre ktoru plati

$$\vec{F} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$$

kde Ω je vektor uhlovej rychlosti zeme a v je vektor pohybujuceho sa telesa. V tejto ulohe mozte zanedbat odpor vzduchu. □

Príklad 2.17. Majte oci otvorene a ked najdete problem, v ktorom by sa dala pouzit poruchova metoda, nenechajte si ujst prilezitost a zratajte to. A tak isto si nenechajte ujst prilezitost najst v tychto poznamkach svoju ulohu a poslite mi jej zadanie. Podakovanie vas neminie. □

3 Väčšie výchylky matematického kyvadla ako malá porucha

Tato cast textu zacina (takmer) tam, kde ta predchadzajuca skoncila a zaobera sa problematikou matematicke kyvadla. Na uvod je popisane matematicke kyvadlo pre male vychylky tak, ako to patri k tradicnemy fyzikalnemu folkloru. V dalsich sekciach sa ale popisuje kyvadlo aj pre vacsie vychylky a hladaju sa opravy k ziskanym rieseniam.

Táto časť je teda ((veľmi) dlhým) riešením úlohy 2.15. To preto, že je veľmi poučná.

Pri analýze budeme postupovať dvomi rôznymi spôsobmi. Budeme poruchovo riešiť pohybovú rovnicu a budeme analyzovať výsledok pre periódu pohybu získanú zo zákona zachovania energie.

3.1 Uvod

Matematicke kyvadlo je hmotny bod na nehmotnom spagate v gravitacnom poli, pripadne hmotny bod fixovany na kruznicu. Ide teda o jednorozmerny problem, pricom polohu bodu popisuje napriklad vychylka φ od rovnovaznej polohy. Budeme oznacovat l dlzku zavesu kyvadla a m hmotnost hmotneho bodu.

Budeme riešiť prípad, kedy na začiatku pohybu dáme kyvadlo do maximálnej výchylky a voľne pustíme, $\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = 0$.

Pohybová rovnica

Pri vychylke φ na hmotny bod posobi v smere kolmom na zaves sila $F = mg \sin\varphi$. Zlozka v smere zavesu je vykompenzovana tahovou silou. Mozme teda pisat pohybovu rovnicu $M = I\varepsilon$ pre nase kyvadlo

$$\begin{aligned} ml^2\ddot{\varphi} &= -\, mgl \sin\varphi \ , \\ \ddot{\varphi} &= -\, \frac{g}{l} \sin\varphi = -\omega^2 \sin\varphi \ . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Označili sme $\omega = \sqrt{g/l}$, čím si ušetríme veľa písania a zdorazňujeme, že pred sínusom v tejto rovnici stojí záporné číslo.

Tu si s nami príroda celkom nepekne zahrala, nakoľko táto rovncia sa nedá vyriešiť. Inak povedané, funkciu ktorá je riešením tejto rovnice nevieme zapísať pomocou nám známych funkcií, ako sú sínusy, kosínusy, mocniny atď. Táto rovnica definuje funkciu $\varphi(t)$ ako svoje riešenie. Hľadaná funkcia sa dá tabuľkovať, hľadať k nej priblíženia a podobne, ale ďalej sa ísť nedá.

Zákon zachovania energie

Pre matematicke kyvadlo plati aj zakon zachovania energie. Ak oznacime celkovu energiu, ktoru kyvadlo ma E, potom z obrazka dostavame

$$\frac{1}{2} ml^2 \left(\dot{\varphi}\right)^2 + mgl(1 - \cos\varphi) = E \tag{3.2}$$

Zrejme celkova energie je rovna potencialnej energii v najvyssom bode, kedy ma teleso nulovu kineticku energiu. Ak oznacime maximalnu vychylku kyvadla φ_0 dostavame

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ml^2\,(\dot\varphi)^2 + mgl(1-\cos\varphi) =& mgl(1-\cos\varphi_0)\ , \\ \frac{1}{2}ml^2\,(\dot\varphi)^2 =& mgl(\cos\varphi-\cos\varphi_0)\ , \\ \dot\varphi =& \pm\,\omega\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\varphi_0)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Znamienko musíme doplniť rukou podľa toho, či sa teleso pohybuje doprava, alebo doľava. V texte sa budeme vždy zaoberať prvou časťou pohybu, takže je pre nás relevantné znamienko mínus.

Na tomto mieste spravime poucny krok, ktorý sa zíde aj mimo tohto textu. Takze teraz pozor. Predchadzajucu rovnicu prepiseme do tvaru

$$-\frac{1}{\omega}\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\varphi_0)}} = dt\ . \tag{3.4}$$

Za týmto vzťahom si treba vždy predstaviť $t = s/v$. Na ľavej strane je v čitateli dráha, ktorú musí bod prejsť uhlovou rýchlosťou v menovateli za čas na pravej strane. V takomto tvare mozme rovnicu integrovat od momentu keď teleso pustíme po moment keď prechádza rovnovážnou polohou a dostavame[9]

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\omega}int^0_{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\varphi_0)}} =& \int_0^{T/4} dt\ , \\ T =& \frac{4}{\omega}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\varphi_0)}}\ . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dostali sme vzťah pre periódu, ktorý je vysčítaním všetkých časov, ktoré bodu trvajú jednotlivé (veľmi malé) úseky.

Samozrejme sme mohli zvoliť iný čas ako periódu a vyjadriť implicitne riešenie ϕ rovnice

$$\ddot\varphi = -\,\omega^2\sin\varphi \tag{3.6}$$

ako

$$t = \pm\,\frac{1}{\omega}\int_\varphi^{\varphi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{2(\cos\phi-\cos\varphi_0)}}\ . \tag{3.7}$$

Tento integrál sa nedá vypočítať rovnako, ako sa rovnica nedá riešiť. Nazýva sa neúplný eliptický integrál prvého druhu.

3.2 Kyvadlo pre male vychylky

Ako sme sa presvedcili v predchadzajucej casti, riesit matematicke kyvadlo pre lubovolne velke vychylky je vec alebo trivialna (riesenie je elypticky integral, co je riesenie matematickeho kyvadla) alebo

[9] Dobre rozmyslieť integračné hranice a čo znamenajú

neriesitelne tazka (v elementarnych funkciach). Za ani jedno z toho nas nik nepochvali a preto sa podme pozriet, co vieme s takym kyvadlom spravit naozaj.

Tu si bez nejakeho priblizenia nebudeme vediet pomoct. Nebudeme teda riesit presny pohyb matematickeho kyvadla, namiesto toho zistime, ako sa pohybuje nieco, so je za istych okolonosti na nerozoznanie od neho.

Pohybová rovnica

Vsimneme si rovnicu (3.1). Ako sme zistili, jej hlavnym problemom je sinus na lavej strasne. Avsak vieme, ze pre male x plati $\sin x \approx x$, čo je vlastne (1.5). Takze ak vychylka φ nie je prilis velka (co to presne znamena si ujasnime neskor), potom riesenie rovnice (3.1) je na nerozoznanie od riesenia nasledujucej rovnice

$$\ddot{\varphi} = -\,\omega^2 \varphi \ . \tag{3.8}$$

No a o tejto rovnici vieme velmi dobre, ze ma vseobecne riesenie

$$\varphi(t) = A \cos(\omega t + B) \ , \tag{3.9}$$

kde pripomíname $\omega = \sqrt{g/l}$ a kde A, B su konstanty, ktore su urcene pociatocnymi podmienkami. V nasom pripade $\dot{\varphi}(0) = 0$ a preto $B = 0$ a maximalna vychylka je φ_0 a teda $A = \varphi_0$. Tuto maximalnu vychylku dosahuje teleso v case $\pi/2\omega$, ktory je vlasnte stvrt periody a preto

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \ . \tag{3.10}$$

Toto vsetko su dobre zname vysledky pre matematicke kyvadlo pri malych vychylkach.

Zákon zachovania energie

Pred tym ako sa pustime dalej si ukazeme, ako sa da k vztahu (3.10) prist z integracie zakona zachovania energie. Hla, takto. Pozrime sa na rovnicu (3.5). V nej potrebujeme spravit nejaku aproximaciu. Polozenim $\cos\varphi \approx 1, \cos\varphi_0 \approx 1$ by vysledok by prestal davat akykolvek zmysel. Premyslite si, ze to je to iste ako polozit $\sin\varphi \approx 0$ v pohybovej rovnici. Tu teda nekonecna perioda v skutocnosti zmysel dava, a to ze teleso kmytat vobec nebude. Ostava nam teda pouzit menej hurube priblizenie a polozit $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2, \cos\varphi_0 \approx 1 - \varphi_0^2/2$, co je konzistentné s aproximáciou vo vyjadrení sily. Takto dostavame

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{(\varphi_0^2 - \varphi^2)} \frac{4}{\omega} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\varphi_0 \sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}}} \ . \tag{3.11}$$

Teraz spravime klucovu substituciu $\varphi/\varphi_0 = x$. Pri nej prechadzaju integracne hranice 0 a φ_0 na hranice $0, 1$ a taktiez $d\varphi = \varphi_0 dx$. To dava

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \ . \tag{3.12}$$

Vidime, ze integral v tomto vyraze je len numerickym fatkorom ktory nijako neobsahuje maximalnu vychylku φ_0. Rovnako ju neobsahuje ani fatkro pred tymto integralom a perioda je v tomto priblizeni od maximalnej vychylky nezavisla! Ostava uz len urcit spominany numericky faktor.

Substitucia $x = \sin u$ vedie na

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} du \frac{\cos u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} = \int_0^{\pi/2} dv = \frac{\pi}{2} \tag{3.13}$$

a teda

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ , \tag{3.14}$$

rovnako ako z pohybovej rovnice.

Príklad 3.1. Dopočítajte výsledok (3.9) zo zákona zachovania energie (3.7). □

Na zaver este raz zdoraznime vysledok tejto casti. V nej sme pocitali cosi INE ako matematicke kyvadlo. Avsak pre rozumne male vychylky bude rozdiel medzi pohybom matematickeho kyvadla a nasim vysledkom nemeratelne maly. Preto pre taketo vychylky mozme povazovat pohyb matematickeho kyvadla za dany rovnicou (2.15) s periodou (3.10).

3.3 Kyvadlo pre vacsie vychylky a prva oprava k periode

Prirodzenou otazkou je teraz pohyb matematickeho kyvadla pre vacsie vychylky. Formalnejie : ked budeme schopni namerat rozdiel medzi skutocnym matematickym kyvadlom a riesenim podla rovnice (2.15) aky bude tento rozdiel, resp. medzi akym riesenim a skutocnym pohybom nebudeme vtedy schopni rozdiel namerat?

Pohybová rovnica

Prirodzenou odpovedou je zobrat jemnejsie priblizenie, ake to, ktore sme doteraz robili. Teda napriklad v presnej pohybovej rovnici (3.1) zoberieme

$$\sin\varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} \tag{3.15}$$

a dostaneme rovnicu

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi + \frac{1}{6}\omega^2\varphi^3\ . \tag{3.16}$$

Tu sa vsak s nami priroda[10] zahrala druhy krat. Ani tato rovnica totiz tiez nema riesenie tak, ako by sme chceli. Rovnako, ako nemala riesenie uz povodna rovnica. Mozme sa ju však pokúsiť riešiť poruchovo. Druhý člen budeme považovať za malú poruchu, nakoľko pre malé výchylky je tretia mocnina výchylky ozaj malé číslo.

[10] Alebo matematika?

No a keďže sme už velkí môžme k tomu celému pristúpiť o čosi formálnejšie. Zavedieme bezrozmerný čas $\tau = t/\omega$ a výchylku preškálujeme počiatčonou výchylkou $\varphi = x\varphi_0$. Ešte si uvedomíme, že $dt = d\tau/\omega$ a teda

$$\ddot{\varphi} = \omega^2 \varphi_0 x'' \ , \tag{3.17}$$

kde už tradične čiarka označuje derivovanie podľa τ. Rovnica potom prejde do tvaru

$$x'' = -x + \frac{1}{6}\varphi_0^2 x^3 \ . \tag{3.18}$$

Malý parameter máme teraz ako na tanieri. Ak je (v radiánoch) φ_0 oveľa menšie ako $\sqrt{6}$. Len pre porovnanie, $\sqrt{6} \approx 2.45$ a druhá mocnina pravého uhlu v radiánoch je 2.47. Píšeme teda $\varepsilon = \varphi_0^2/6$ a hľadáme riešenie v tvare $x \to x_0 + \varepsilon x_1$. Pre x_0 dostaneme $x_0'' = -x_0$ čo spolu s počiatočnou podmienkou dá

$$x_0 = \cos\tau \ . \tag{3.19}$$

Pre x_1 potom dostaneme

$$x_1'' = -x_1 + x_0^3 = -x_1 + \cos^3\tau \ . \tag{3.20}$$

Táto rovncia je už trochu ťažší oriešok, ale poradíme si s ňou. A to v sérií príkladov.

Príklad 3.2 (Linárny harmonický oscilátor je linárny)**.** Majme situáciu, kedy na harmický oscilátor popísaný rovnicou $\ddot{x} = -x$ pôsobí ešte naviac vonkajšia sila $F_1(\tau)$. Nech počiatočná podmienka pre pohyb je $x(0) = x_{0,1}$ a $\dot{x}(0) = v_{0,1}$. V takejto situácií nech je výsledný pohyb daný funkciou $x_1(\tau)$. Majme potom situáciu, kde je pri pôsobení vonkajšej sily $F_2(\tau)$ a počiatočných podmienkach $x(0) = x_{0,2}$ a $\dot{x}(0) = v_{0,2}$ výsledný pohyb daný funkciou $x_2(\tau)$.

Ukážte, že pre ak na oscilátor pôsobí sila $F_1(\tau) + F_2(\tau)$ a jeho počiatočná poloha a rýchlosť je $x_{0,1} + x_{0,2}$ a $v_{0,1} + v_{0,2}$, potom je jeho pohyb daný funkciou

$$x(\tau) = x_1(\tau) + x_2(\tau) \ . \tag{3.21}$$

□

Návod. Jednoducho sčítať pohybové rovnice.

Príklad 3.3 (Harmonická vynucujúca sila)**.** Ukážte, že ak na oscilátor pôsobí vonkajšia sila $F(t) = Ae^{i\Omega\tau}$ s $\Omega^2 \neq 1$, potom je jeho pohyb nasledovný

$$x(\tau) = c_1 \cos\tau + c_2 \sin\tau + \frac{A}{1-\Omega^2} e^{i\Omega\tau} \ . \tag{3.22}$$

Ukážte, že ak na oscilátor pôsobí vonkajšia sila $F(t) = Ae^{\pm i\tau}$, potom je jeho pohyb nasledovný

$$x(\tau) = c_1 \cos\tau + c_2 \sin\tau \mp \frac{iA}{2} e^{\pm i\tau} \ . \tag{3.23}$$

□

Príklad 3.4 (Rozklad $\cos^3\tau$)**.** Z identity $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ nájdite rozklad $\cos^3\tau$. □

Výsledok.

$$\cos^3\tau = \frac{1}{8}\left(e^{3i\tau}+e^{-3i\tau}\right)+\frac{3}{8}\left(e^{i\tau}+e^{-i\tau}\right) \ . \tag{3.24}$$

■

Príklad 3.5. Vyriešte rovnicu (3.20). □

Návod. Oplatí sa vedieť aj, že $\sin x = (e^{ix}-e^{-ix})/(2i)$.

Ak ste sa nepomýlili, mali by ste dostať výsledok

$$x(\tau) = \cos\tau + \frac{\varepsilon}{16}\sin\tau\left[6\tau+\sin(2\tau)\right] = \cos\tau + \varphi_0^2\frac{1}{96}\sin\tau\left[6\tau+\sin(2\tau)\right] \ . \tag{3.25}$$

Dostali sme teda opravu k harmonickému pohybu kyvadla. Pred tým, ako dopočítame periódu si všimneme čosi zaujímave. Bez ohľadu na to, aké malé je ε dostávame po dostatočne dlhom čase veľkú výchylku x. Malá porucha, ktorá je malá vždy spôsobí veľmi veľké efekty. Na mieste je otázka ako je to možné. Odpoveď, spolu so spôsobom ako pre malú poruchu dosať malé efekty aj v tomto prípade nechávame za obzor týchto poznámok. Povedzme len, že je to čosi dosť iné ako v prípade odporu vzduchu, kde pri veľkých rýchlostiach bola samotná odporová sila veľká a už nebola malou opravou.

Chceli by sme teraz nájsť periódu porušeného kyvadla. Hľadáme teda rišenie rovnice $x'(\bar\tau)=0$, kde sme periódu pre nedostatok iných možností označili pruhom. Zaujíma nás ale iba poruchové riešenie tejto rovnice, takže

$$\bar\tau \to \bar\tau_0 + \varepsilon\bar\tau_1 \ . \tag{3.26}$$

Vieme, že v neporušenom prípade je perióda v bezrozmernom čase $\bar\tau_0 = 2\pi$ (ak nie je jasné premyslieť), dostávame teda

$$x'(\tau) = -\sin\tau + \varepsilon\frac{1}{16}\Big[\big(6+2\cos(2\tau)\big)\sin\tau + \cos\tau\big(6\tau+\sin(2\tau)\big)\Big] \ , \tag{3.27}$$

$$x'(2\pi+\varepsilon\bar\tau_1) \approx \varepsilon\left(\frac{3\pi}{4}-\bar\tau_1\right) \tag{3.28}$$

Dostali sme teda pre bezrozmernú periódu

$$\bar\tau = 2\pi + \frac{3\pi}{4}\varepsilon = 2\pi + \frac{\pi}{8}\varphi_0^2 \ . \tag{3.29}$$

V pôvodných jednotkách to znamená

$$T = \frac{\bar\tau}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\frac{1}{16}\varphi_0^2\right] = T_0\left[1+\frac{1}{16}\varphi_0^2\right] \ . \tag{3.30}$$

Nasli sme teda periodu matematickeho kyvadla v priblizeni, v ktorom φ_0^2 nie je nezanedbatelne, ale vyssie mocniny uz ano. Tomuto budeme hovorit "perioda v rade φ_0^2".

Zákon zachovania energie

Urobme v zákone zachovania energie (3.5) to isté, a zoberme analogicky lepsiu aproximaciu $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2 + \varphi^4/24$. Tym dostavame

$$T = \frac{4}{\omega}\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2 - \frac{\varphi_0^4 - \varphi^4}{12}}} = \frac{4}{\omega}\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\varphi_0\sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{\varphi_0^2} - \frac{\varphi_0^2}{12}\left(1 - \frac{\varphi^4}{\varphi_0^4}\right)}} \ . \tag{3.31}$$

Opat rovnaka substitucia ako v prechdazajucej casti vedie na

$$T = \frac{4}{\omega}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - \frac{\varphi_0^2}{12}(1 - x^4)}} = \frac{4}{\omega}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\varphi_0^2}{12}\frac{1-x^4}{1-x^2}}} \ . \tag{3.32}$$

Pouzijeme rozvoj $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ a dostavame

$$T = \frac{4}{\omega}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{24}\frac{1-x^4}{1-x^2}\right) = \frac{4}{\omega}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{24}(1+x^2)\right) = \tag{3.33}$$

$$= \frac{2\pi}{\omega}\left[1 + \frac{\varphi_0^2}{12\pi}\int_0^1 dx \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right] \ . \tag{3.34}$$

Ostava teda uz len vypocitat integral v tomto vztahu. Nan potrebujeme vediet

$$\int_0^1 dx \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \ , \tag{3.35}$$

v ktorom rovnaka substitucia ako v predchadzajucej casti dava

$$\int_0^{\pi/2} dt \sin^2 u = \int_0^{\pi/2} dt \frac{1 - \cos(2u)}{2} = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4} \tag{3.36}$$

Potom

$$\int_0^1 dx \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3\pi}{4} \ . \tag{3.37}$$

a vysledna perioda v tomto priblizeni je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right] = T_0\left[1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right] \ . \tag{3.38}$$

3.4 Dalsie opravy

Skusme teraz najst este lepsie prbilizenie k periode. Cesta k tomuto výsledku je priamočiara a prípad pohybovej rovnice necháme na čitateľa. Ukážame si ako k výsledku vediet analýza zákona zachovania energie.

Najnizsi dalsi netrivialny prispevok je az v rade φ_0^4. Ked sme robili rozvoj $(1+x)^\alpha$ zobrali sme tento rozvoj iba do radu x. Rozvoj az do radu x^3 vyzera nasledovne

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{1}{2}(\alpha - 1)\alpha x^2 + \frac{1}{6}(\alpha - 2)(\alpha - 1)\alpha x^3 \tag{3.39}$$

Toto teraz pozijeme v rozvoji (3.32) a dostaneme pre periodu do radu φ_0^4

$$T = \frac{4}{\omega}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{\varphi_0^2}{12}(1+x^2)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\varphi_0^2}{12}(1+x^2)\right)^2\right] . \tag{3.40}$$

Tu nam uz len ostava dopocitat nejake integraly a mame vysledok ... ktory je NESPRAVNY!!! Ak vam na tomto mieste nie je jasne preco, odporucam sa zastavit a skusit na to prist samostatne.

Tak a pretoto je predchadzajuci vysledok zly.

Neobsahuje vsetky cleny, ktore su radu φ_0^4. Preco? Pretoze niektore z nich sme uz na samom zaciatku zahodili, ked sme robili aproximaciu kosinusu. Zda sa sidce, ze sme zobrali $\cos\varphi$ az do radu φ_0^4, ale ked sa teraz pozrieme o krok dalej, vysledok obsahuje uz len cleny radu φ_0^2. Za to moze horna hranica integracie, ktora sama o sebe bola φ_0. Na to, aby sme zahrnuli vsetky cleny, ktore su radu φ_0^4, musime zobrat v rozvoji kosinusu o rad viac, tj. $\cos\varphi \approx 1-\varphi^2/2+\varphi^4/24-\varphi^6/720$. Toto potom dava v (3.5)

$$\begin{aligned}
T =& \frac{4}{\omega}\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\left(\frac{\varphi_0^2-\varphi^2}{2}-\frac{\varphi_0^4-\varphi^4}{24}+\frac{\varphi_0^6-\varphi^6}{720}\right)}} = \\
=& \frac{4}{\omega}\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\varphi_0\sqrt{1-\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)^2-\frac{\varphi_0^2}{12}\left(1-\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)^4\right)+\frac{\varphi_0^4}{360}\left(1-\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)^6\right)}} = \\
=& \frac{4}{\omega}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2-\frac{\varphi_0^2}{12}(1-x^4)+\frac{\varphi_0^4}{360}(1-x^6)}} = \\
=& \frac{4}{\omega}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\varphi_0^2}{12}(1+x^2)+\frac{\varphi_0^4}{360}\left(\frac{1-x^6}{1-x^2}\right)}}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

kde sme spravili niekolko uprav analogicky ako v prechadzajucich pripadoch. Vidime, ze tu mame novy clen radu φ_0^4, ktory v prechadzajucom vztahu nebol. Tu je aj odpoved na otazku preco sme v prechadzajucej casi brali vysledok len do radu φ_0^2 a preco bol vysledok (3.40) nespravny. Teraz uz nie je nic lahsie ako pouzit rozvoj (3.39) cim dostaneme

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{\varphi_0^2}{12}(1+x^2)-\frac{1}{2}\frac{\varphi_0^4}{360}(1+x^2+x^4)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\varphi_0^2}{12}(1+x^2)\right)^2\right] \tag{3.42}$$

Všimnite si, že sme v poslednom člene vynechali časť úmernú φ_0^4. To preto, že umocnením by vznikli členy, ktoré by obsahovali mocniny vyššie ako φ_0^4, ktoré sú pre nás nedoležíte. Postupnými úpravami sa dostávame k výsledku

$$T = T_0\left[1+\frac{\varphi_0^2}{16}+\varphi_0^4\frac{2}{\pi}\int_0^1 dx\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{7+22x^2+7x^4}{5760}\right)\right] . \tag{3.43}$$

Ostava zistiť, čomu sa rovná

$$\int_0^1 dx\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} . \tag{3.44}$$

Počítame teda

$$\int_0^{\pi/2} dt \sin^4 u = \int_0^{\pi/2} du \frac{(1-\cos(2u))^2}{4} = \frac{\pi}{8} + 0 + \int_0^{\pi/2} du \frac{(1+\cos(4u))}{4} = \frac{3\pi}{16} \ . \tag{3.45}$$

Teraz pozbierame všetky členy, počkáme kým sa usadí prach a hľa, máme výsledok

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + \frac{11}{3072}\varphi_0^2 \right] \ . \tag{3.46}$$

No nie je krásny?

Príklad 3.6. Porovnajte jednotlivé opravy k pôvodnému výsledku T_0 pre rôzne počiatočné výchylky. Aká je ich veľkosť v porovnaní so zmenami tiažového zrýchlenia na povrchu Zeme? □

3.5 Za obzorom týchto poznámok

V tejto časti sme si nechali za obzor poznámok o čosi menej. Poruchovým riešením pohybovej rovnice sme došli k výsledku (v bezrozmernom čase $\tau = t\omega$ a v preškálovanej premennej $x = \varphi/\varphi_0$

$$x(\tau) = \cos\tau + \frac{\varepsilon}{16}\sin\tau\,[6\tau + \sin(2\tau)] = \cos\tau + \varphi_0^2\frac{1}{96}\sin\tau\,[6\tau + \sin(2\tau)] \ . \tag{3.47}$$

Tento výsledok rastie bez obmedzenia. To je ale divné, nakoľko porucha je vždy malá a povedali sme si, že to je preto že sa malé chyby poruchovej metódy počas kmitania kyvadla nazbierajú. Ukážeme si teraz spôsob, ako sa to dá vyriešiť aj v rámci poruchovej metódy a tento rast zastaviť.

Kľúčové je uvedomiť si, že tento člen možno zarátať do zmenenej frekvencie oscilátora. Detaily necháme na čitateľa v rámci niekoľkých príkladov.

Príklad 3.7. Rozmyslite si, že zmena periódy (do prvého rádu) z 2π na $2\pi + 3\pi\varepsilon/4$ zodpovedá zmene frekvencie oscilátora z 1 na

$$1 - \frac{3}{8}\varepsilon \ . \tag{3.48}$$

□

Návod. $1/(1+\varepsilon x) = 1 - \varepsilon x$.

Príklad 3.8. Ukážte, že do prvého rádu v ε platí

$$\cos\tau + \frac{\varepsilon}{16}6\tau\sin\tau \approx \cos\left[\left(1 - \frac{3}{8}\varepsilon\right)\tau\right] \ . \tag{3.49}$$

□

To znamená, do prvého rádu v φ_0^2 môžeme rovnako dobre písať výsledok, ktorý je už ale dobrý pre všetky časy

$$x(\tau) = \cos\left[\left(1 - \frac{1}{16}\varphi_0^2\right)\tau\right] + \varphi_0^2\frac{1}{96}\sin\tau\sin(2\tau) = \cos\left[\left(1 - \frac{1}{16}\varphi_0^2\right)\tau\right] - \varphi_0^2\frac{1}{192}\cos(3\tau) \ . \tag{3.50}$$

4 Odporucane citanie

Pre čitateľov, ktorí ani po tomto všetkom nemajú dosť, uvádzame ešte niekoľko zdrojov na ďalšie čítanie (nielen) o poruchovej metóde. Všetky sú dostupné zdarma na internetoch a rád vám ich ukáže váš obľúbený internetový prehliadač.

- Tekel - Základy fyziky
- Bohm - Matematicke metody vo fyzike
- Fecko - Rozšírený sylabus k predmetu Teoretická Mechanika
- T. Lakoba - Mathematical Models and Their Analysis (University of Vermont), najmä prednášky 3 a 6, 7 a 8