19.10.2020

technicky: $\boxed{N, V}\ \boxed{N, V}$ → $2N, 2V$

$S_2 \neq 2S_1$ ak $Z = Z_1^N$

problém riešenie $Z \to \boxed{\frac{1}{N!} Z_1^N}$

logika: pre $N \gg 1$

$\frac{1}{N!} \Leftrightarrow$ častice sú nerozlíšiteľné

ak vymeníme $(\vec{x}_1, \vec{v}_1) \leftrightarrow (\vec{x}_2, \vec{v}_2)$

nedostaneme nový mikrostav

ŽIARENIE ČIERNEHO TELESA

↳ plyn fotónov – ultrarelativistické častice $\Leftrightarrow$ $E^2 = p^2c^2 + \underbrace{m^2c^4}_{\text{zanedbateľné}} \Rightarrow \boxed{E^2 = c^2\hbar^2 k^2}$

vlnový vektor

„hustota stavov" $\quad \sum_i \to \int dE\, \boxed{\omega(E)}$

rôzne mikrostavy vedúce na tú istú energiu

suma cez mikrostavy

„suma" cez energie

$dE = \hbar c\, dk$

podobný výpočet ako pre častice v ~~[illegible]~~ škatuli

$$\sum_i \to \int \frac{d^3k\, d^3x}{(2\pi)^3}$$

$$\sum_i = \int dk\, k^2 \frac{4\pi V}{(2\pi)^3} = \int dE \frac{VE^2}{2\pi^2\hbar^3c^3} =$$

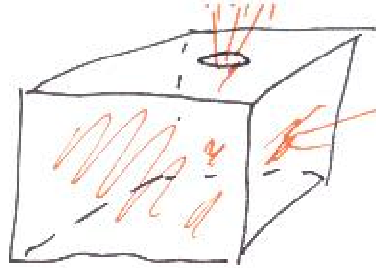
prejdeme k frekvencii: $E = \hbar\nu \quad dE = \hbar\, d\nu$

$$= \boxed{\int d\nu \frac{g_s V \nu^2}{2\pi^2 c^3}}$$

$$\frac{d^3p\, d^3x}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{d^3k\, d^3x}{(2\pi)^3}$$

spinová degenerácia – dve rôzne polarizácie fotónu $\boxed{g_s = 2}$

$$\boxed{\omega(\nu) = g_s \frac{V\nu^2}{2\pi^2 c^3}}$$



• plyn fotónov ako kanonický súbor

↳ jednočasticové stavy dané ν $\quad Z_\nu = \sum_i e^{-\beta\varepsilon_i} = \sum_n e^{-\beta\hbar\nu n} = \text{geometrický rad} = \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\nu}}$

možné konfigurácie jednočasticového stavu

N nezodpovedá počtu fotónov, ale počtu jednočasticových stavov ⟺ frekvencie ν

↳ celková štatistická suma: $Z = \prod_\nu Z_\nu$ potrebujeme $\log Z$

$$\log Z = \sum_\nu \log Z_\nu = \int d\nu\, \omega(\nu) \log Z_\nu = -\frac{V}{\pi^2 c^3}\int d\nu\, \nu^2 \log\left(1 - e^{-\beta\hbar\nu}\right)$$

toto nie všetko čo potrebujeme

napríklad: $\langle E\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z = +\frac{V}{\pi^2c^3}\int d\nu\, \nu^2 \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\nu}}\left(-e^{-\beta\hbar\nu}\right)(-\hbar\nu)$

$$= \frac{V\hbar}{\pi^2c^3}\int_0^\infty d\nu \frac{\nu^3}{e^{\beta\hbar\nu}-1} = \begin{bmatrix} x = \beta\hbar\nu \\ d\nu = \frac{dx}{\beta\hbar}\end{bmatrix} = \frac{V}{\pi c^3}\frac{1}{\beta^4}\frac{1}{\hbar^3}\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x-1} =$$

iba číslo $= \frac{\pi^4}{15}$

hustota energie $\boxed{\varepsilon = \frac{\langle E\rangle}{V} = \frac{\pi^2 \hbar^4}{15\hbar^3 c^3} T^4}$ $\quad$ $\boxed{\text{tok energie} = \frac{\varepsilon c}{4} = \sigma T^4}$

(3)

• tlak $\langle p \rangle = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\log Z = \ldots = \frac{\langle E \rangle}{3V}$ — dôležité v kozmológii

— iné ako pre ideálny plyn častíc

• $\langle E \rangle = \int_0^\infty d\omega \, \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1} = \int_0^\infty d\omega \, \boxed{\frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2}{e^{\beta\hbar\omega}-1}} \, \hbar\omega$

hustota energie v priestore frekvencií $\Leftrightarrow$ koľko energie vo frekvenciách $(\omega, \omega + d\omega)$

Planck 1900 — začiatok kvantovej mechaniky

• klasický výpočet: $\hbar \to 0$; $\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1} \to \frac{1}{\beta\hbar\omega}$ hustota energie $\sim \omega$

energia v $(\omega, \omega + d\omega) \sim \omega^2 \Rightarrow \langle E \rangle \to \infty$

problém

• Wienov zákon: $\lambda_{max} \sim \frac{1}{T}$ $\qquad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$

hovorí o farbe žiarenia, aj o farbe žiariaceho objektu

• ďalej je ľahké overiť, že v kanonickom súbore

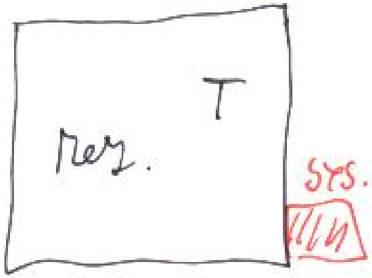
$$\Delta E^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log Z = -\frac{\partial}{\partial \beta} \langle E \rangle$$

• tepelná kapacita $C_V = \left.\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T}\right|_V$ (overiť: $\frac{\partial}{\partial T} = kT^2 \frac{\partial}{\partial \beta}$)

dostaneme $\boxed{\Delta E^2 = kT^2 C_V}$ fluktuácie $\Leftrightarrow$ disipácia

• $C_V \sim N$ (pre ideálny plyn $C_V = \frac{3}{2} N k$) $\Rightarrow \Delta E \sim \sqrt{N} \Rightarrow \boxed{\frac{\langle E \rangle}{\Delta E} = \frac{1}{\sqrt{N}}}$

• kanonický súbor ako teplomer



↳ naopak: mám systém, poznám závislosť $\langle E \rangle$ od T

iný systém (rezervoár) s neznámou teplotou

priložím systém, nechám vyrovnať a odmeriam $\langle E \rangle$

na základe $\langle E \rangle$ od T viem <u>určiť teplotu rezervoára</u>!

CHEMICKÝ POTENCIÁL

↳ komplikovaný pojem

↳ niečo podobné ako teplota a tlak

- štartujeme s entropiou $S(E,V,N) = k \log \Omega(E,V,N)$

závislosť S od E viedla na teplotu $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}\Big|_{V,N}$

— // — S od V — // — tlak $p = T \frac{\partial S}{\partial V}\Big|_{E,N}$

— // — S od N — // — chemický potenciál

$$\boxed{\mu := -T \frac{\partial S}{\partial N}\Big|_{E,V}}$$

- iba analógia: podmienka

$\boxed{A}\ \boxed{B}$
$\overset{\longleftrightarrow}{E}$

$\frac{\partial S_A}{\partial E} = \frac{\partial S_B}{\partial E} \Leftrightarrow$ energetická rovnováha

$\frac{\partial S_A}{\partial V} = \frac{\partial S_B}{\partial V} \Leftrightarrow$ objemová rovnováha

$$\boxed{\frac{\partial S_A}{\partial N} = \frac{\partial S_B}{\partial N} \Leftrightarrow \text{časticová rovnováha}}$$

prečo $-T$?

$$dS = \frac{\partial S}{\partial E} \cdot dE + \frac{\partial S}{\partial V} \cdot dV + \frac{\partial S}{\partial N} \cdot dN$$

$$dE = T\,dS - p\,dV + \mu\,dN$$

μ: zmena energie pri dodaní jednej častice pri $dS = dV = 0$

netriviálne

GRANDKANONICKÝ SÚBOR

• analogické úvahy ako pre kanonický súbor

MIKROKANONICKÝ SÚBOR

mikrostav systému

$$p_i \sim \Omega_R(i) \sim e^{S_R/k} \sim e^{-\beta E_i + \mu \beta N_i}$$

počet mikrostavov rezervoára pri mikrostave systému i

• normovacia konštanta $$\mathcal{Z} = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$$

grand kanonická suma

$$\boxed{p_i = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}}$$

energia mikrostavu i

počet častíc v mikrostave i