• CHEMICKÝ POTENCIÁL $\mu = -T \frac{\partial S}{\partial N}\Big|_{T,V}$ ⟷ [A] [B] ⟷ častice — vymieňanie častíc dá rovnováhu ($V_A + V_B = V = \text{const}$)

$$\frac{\partial S_A}{\partial N} = \frac{\partial S_B}{\partial N}$$

vyrovnáva sa, ak si systémy môžu meniť častice

20.10.2020

• GRAND KANONICKÝ SÚBOR $p_i = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$

$\mathcal{Z} = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$ — veľká štatistická suma

---

MIDTERM PÍSOMKA 3.11. CEZ PREDNÁŠKU (OD 9:50 – 11:20)

↳ OPEN BOOK & OPEN NOTES & WEB → NIE KOOPERÁCIA → BUDEME PRÍSNÍ PRI OPRAVOVANÍ A POSUDZOVANÍ ODPISOVANIA

↳ TÝŽDNE 1.–6. ← MATERIÁL

↳ aj v GC súbore je entropia $S = k \frac{\partial}{\partial T}(T \log \mathcal{Z})$ $\left(= -k \sum_i p_i \cdot \log p_i\right)$

↳ —||— ako derivácie $\log \mathcal{Z}$ spojené so strednými hodnotami

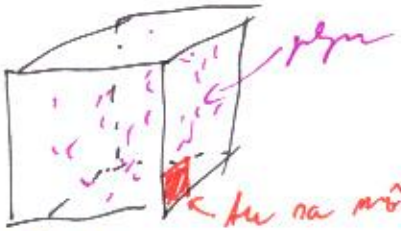
$$\langle N \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \log \mathcal{Z}$$

$$\langle E \rangle - \mu \langle N \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log \mathcal{Z}$$

↳ aj tu $\frac{\Delta N^2}{\Delta E^2} \sim N$

PŘÍKLAD SYSTÉMU POPISOVANÉHO GC. SOUBOREM

„lepivé misky v plynu"



← tu na misce může nalepit částice plynu, za energie Δ

- dva mikrostavy 1: $E_1 = 0$ $N_1 = 0$
  2: $E_2 = \Delta$ $N_2 = 1$

$$\mathcal{Z} = \sum_i \Omega_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)} = e^{-\beta(0-\mu\cdot 0)} + e^{-\beta(\Delta-\mu\cdot 1)}$$

$$= 1 + e^{-\beta(\Delta-\mu)}$$

- střední energie $\langle E \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \cdot 0 + \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta(\Delta-\mu)} \cdot \Delta = \frac{\Delta e^{-\beta(\Delta-\mu)}}{\mathcal{Z}}$

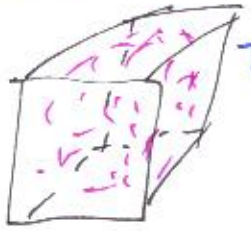
$$\langle N \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \cdot 0 + \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta(\Delta-\mu)} \cdot 1 = \frac{e^{-\beta(\Delta-\mu)}}{\mathcal{Z}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \log \mathcal{Z} = \frac{1}{1 + e^{-\beta(\Delta-\mu)}} e^{-\beta(\Delta-\mu)} \cdot (-\Delta + \mu) \Rightarrow \langle E \rangle = \frac{\Delta e^{-\beta(\Delta-\mu)}}{\mathcal{Z}} - \mu \langle N \rangle + \mu \langle N \rangle$$

$$= \frac{\Delta e^{-\beta(\Delta-\mu)}}{\mathcal{Z}}$$

IDEÁLNY PLYN AKO G.C. SÚBOR

• v limite $N \to \infty$ kanonický stavový súčet pre ideálny plyn



problém, G.S. súborom

$$Z_N = \frac{1}{N!} z_1^N = \frac{1}{N!}\left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N$$

$\lambda \to$ termická vlnová dĺžka

$$\mathcal{Z} = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)} = \sum_N \left(e^{\beta\mu N} \underbrace{\sum_{j_1 N_j = N} e^{-\beta E_j}}_{Z_N} \right) =$$

suma cez pozície častíc

suma cez mikrostavy s počtom častíc fixovaným na N

$$= \sum_N \frac{1}{N!}\left(\frac{V}{\lambda^3} e^{\beta\mu}\right)^N = e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^{\frac{V}{\lambda^3} e^{\beta\mu}}$$

• počítam $\langle N \rangle = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \mu} \log \mathcal{Z} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{V}{\lambda^3} e^{\beta\mu}\right) = \frac{1}{\beta}\frac{V}{\lambda^3} e^{\beta\mu} \cdot \beta$

$= \frac{V}{\lambda^3} e^{\beta\mu} \Rightarrow$ obrátim a dostanem $\mu = kT \log\left(\frac{\lambda^3 N}{V}\right)$

pre veľké N $\langle N \rangle \propto N$

• chemicko-potenciálový meter (analógia teplota-metre)

• výpočet žiarenia čierneho telesa je AKO ICZOT

výpočet v G.C. súbore s $\mu = 0$ • počet fotónov sa nezachováva.

$\mu = ?$

malý

nechám vyformovať, odmeriam $\langle N \rangle$ v malom systéme a z toho vrátim μ

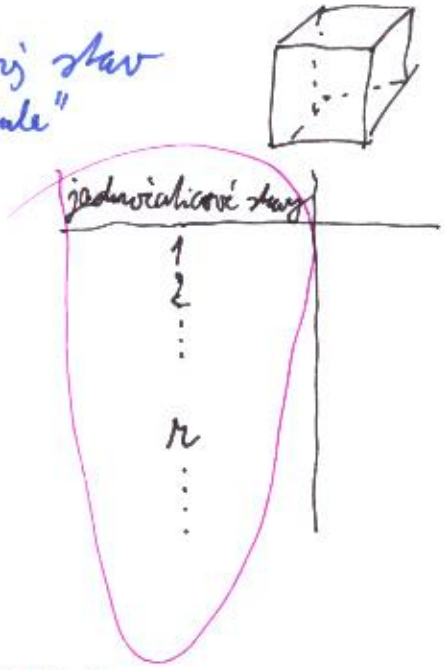
KVANTOVÉ PLYNY – PLYNY NEROZLÍŠITEĽNÝCH ČASTÍC

- ako charakterizovať mikrostav – ak viem rozlíšiť častice, tak mikrostav je „tabuľka"
  ↳ potom súbor je sada tabuliek a počítanie stredných hodnôt je predvádzanie cez tabuľky s kalkulačkou

častica	stav danej častice
1	⋮
2	⋮
3	⋮
4	⋮
⋮	⋮

– čo keď nevieme rozlíšiť častice? iné tabuľky

- jednočasticový stav „polovica tabuľky"



tabuľka definuje možnosti, čo v nej častice môžu robiť (napríklad n_1, n_2, n_3)

- mikrostav pre nerozlíšiteľné častice je určený počtom častíc v jednočasticových stavoch!

jednočasticový stav	#častíc v danom stave
1	n_1
2	n_2
3	n_3
⋮	⋮
r	n_r
⋮	⋮

obsadzovacie číslo stavu r

jeden mikrostav

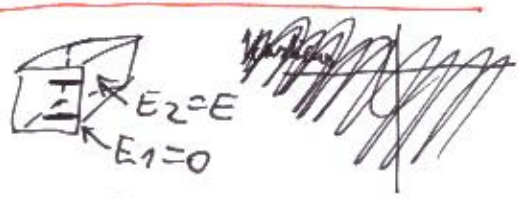
potom platí ďalej

určené tabuľkou „určené systémom"

- môžu byť obmedzenia na to, čo môžu vyjesť n_r
  - ↳ napríklad v kanonickom súbore $\sum_r n_r = N$ ← také implementovať
  - preto je jednoduchšie pracovať v G.C.
  - (s takým sa, ako sme dostali požiadavku $\langle N \rangle$)
- jednočasticový stav sa pojme G.C. súborom $\mathcal{Z}_r$ a potom $\mathcal{Z} = \prod_r \mathcal{Z}_r$
  - predpokladá nezávislosť jednočasticových stavov r
  - „počítame najprv cez riadky"
- môžu byť ďalšie obmedzenia (okrem fermiónov $n_r = 0, 1$)

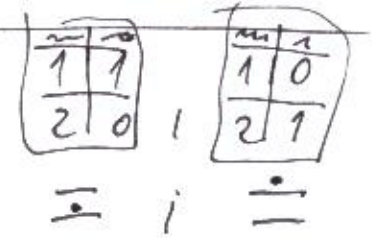
MIKLAS - DVOJHLADINOVÝ SYSTÉM

tabuľka



časticový stav	n_r
1	
2	

- pridáva do systému častice → $N=1$
  2 mikrostavy



(super dôležité) $N=2$

3 mikrostavy

pre nerozlíšiteľné častice sú to 2 mikrostavy, pre rozlíšiteľné častice sú to 1

- pri fixovanej teplote, $N=2$

$$\mathcal{Z} = \sum_i e^{-\beta E_i} = 1 + e^{-\beta E} + e^{-2\beta E}$$

• neinteragujúce častice – samostné stavy r nerozlíšiteľné od n_r (od ľubovoľného iného jednočasticového stavu)

– počty n_r sú medzi sebou nezávislé

• možné hodnoty n_r – vo svete sú dva rôzne druhy častíc

↳ bozóny – ľubovoľné $n_r = 0, 1, 2, 3, \ldots$

↳ fermióny – iba $n_r = 0, 1$

↳ rôzne ako so spinom častíc – so spinom ide aj degenerácia

ako to bez spinu je jeden stav, je so spinom viac stavov