26.10.2020

- neinteragujúce častice – samotné stavy r nezávisia od n_r (od žiadneho iného jednočasticového stavu)

  – všetky n_r sú medzi sebou nezávislé

- možné hodnoty n_r – vo svete sú dva rôzne druhy častíc

  ↳ bozóny – ľubovoľné $n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$

  párny počet elementárnych častíc (He^4)
  fotóny (spin 1)

  ↳ fermióny – iba $n_r = 0, 1$

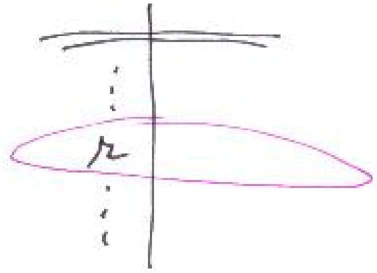
  elektróny, protóny, ...
  (spin 1/2)
  nepárny počet elementárnych častíc
  (He^3)

  ↳ súvisí to so spinom častíc – so spinom ide aj degenerácia

  to čo bez spinu je jeden stav, je ~~so~~ so spinom viac stavov

  ↳ častice s rôznym spinom (ale inak také isté) budeme považovať za rôzne jednočasticové stavy

FERMIÓNY



↳ veľká štatistická suma jednočasticového stavu

$$Z_r = \sum_{n_r} e^{-\beta(\overbrace{\varepsilon_r n_r}^{E} - \mu \overbrace{n_r}^{N})} = \text{FERMIÓNY} =$$

$$= 1 + e^{-\beta(\varepsilon_r - \mu)}$$

↳ stredné obsadzovacie číslo

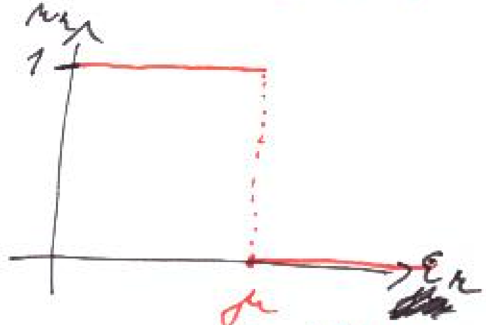
$$\langle n_r \rangle = \overbrace{\frac{1}{Z_r}\cdot 0 + \frac{e^{-\beta(\varepsilon_r-\mu)}}{Z_r}\cdot 1}^{\sum_i n_i p_i} = \boxed{\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_r-\mu)}+1}}$$

FERMI-DIRACOVO ROZDELENIE

↳ pozorovanie : $\langle n \rangle_r \in (0,1)$

↳ ako to vyzerá v limite $T \to 0$?
$(\beta \to \infty)$

$$\langle n_r \rangle \begin{cases} \varepsilon_r > \mu & \to 0 \\ \varepsilon_r < \mu & \to 1 \end{cases}$$



E_F (FERMIHO ENERGIA

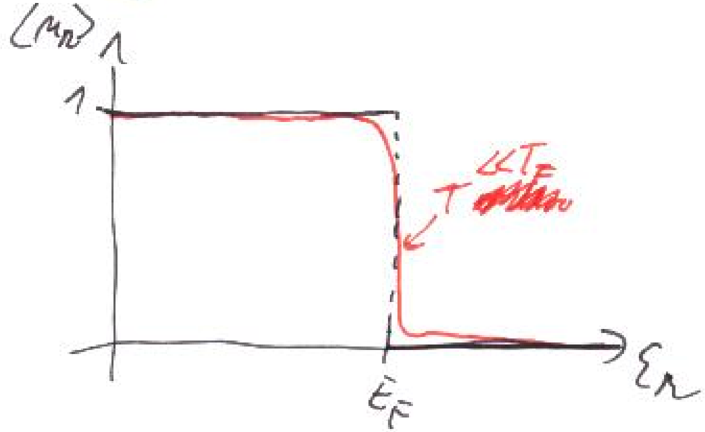
počet častíc v systéme ?

$$N = \sum_r \langle n_r \rangle = \int_0^\infty dE\, \omega(E) \langle n_r(E) \rangle = \int_0^{E_F} dE\, \underbrace{\omega(E)}_{\sim\sqrt{E}} =$$

$$= \frac{g_s V}{6\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E_F^{3/2} \Rightarrow \boxed{E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{6\pi^2}{g_s}\frac{N}{V}\right)^{2/3}}$$

• Fermiho teplota $T_F = \frac{E_F}{k}$

pre malé teploty



„malé" teploty sú teploty $\ll T_F$

pre ľahké častice (napríklad elektróny) je T_F celkom veľká

napríklad elektróny v kove $T_F \sim 10^4 K$

$\longleftrightarrow$ rozdiel iba pre r, kde $\varepsilon_r \approx E_F$

↳ to znamená, že malé energie sú energie malé v porovnaní s E_F

• celková energia: $E = \int_0^\infty d\varepsilon\, \varepsilon\, \omega(\varepsilon) \langle n_r(\varepsilon) \rangle = \frac{3}{5} N E_F$

• Fermi-Diracovo rozdelenie hovorí, že pre veličinu $A(\varepsilon)$

$$\boxed{\langle A(\varepsilon) \rangle = \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\omega(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} A(\varepsilon)}$$

BOZÓNY

↳ veľká štatistická suma pre jednočasticový stav

$$Z_r = \sum_{n_r}{}' e^{-\beta(\varepsilon_r n_r - \mu n_r)} = \sum_{n_r}{}' \Big(\underbrace{e^{-\beta(\varepsilon_r - \mu)}}_{q}\Big)^{n_r} = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_r - \mu)}}$$

$q<1$, inak blbosť, t.j. $\mu < \varepsilon_r \; \forall r$ ⇓ $\boxed{\mu < 0}$

potom pre strednú obsadenosť stavu r

$$\langle n_r \rangle = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \mu}\log Z_r = \frac{1}{Z_r}\sum_{n_r}{}' n_r e^{-\beta n_r(\varepsilon_r - \mu)} =$$

$$\boxed{= \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_r - \mu)} - 1}, \; \mu < 0}$$

← pre $\mu > 0$ by sme mohli dostať $n_r < 0$

- rovnaký ako pre fermióny so znamienkom −
- BOSE–EINSTEINOVO ROZDELENIE

↳ pre veličinu $A(E)$

$$\boxed{\langle A(E) \rangle = \int dE \, \frac{\omega(E)}{e^{\beta(E-\mu)} - 1} A(E)}$$

↳ žiarenie čierneho telesa, kde $\mu = 0$

ale to bola iba náhoda

BOSE-EINSTEINOVA KONDENZÁCIA

↳ najzaujímavejší dôsledok B-E rozdelenia

↳ fázový prechod

↳ zvláštny jav, ktorý nastáva pri nejakej malej ale nenulovej teplote T_c

• pri $T=0$ všetky častice v stave o nulovej energii

základný stav

pri trochu väčšej teplote $n(\varepsilon_0) = \cancel{\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_0-\mu}{kT}}-1}}$ n_0 ≈ pre typické hodnoty $\boxed{\approx 10^{22}}$

prvý excitovaný stav

$$n(\varepsilon_1) = \dots = \frac{1}{\frac{1}{n_0} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{kT}} \approx \text{ — // — } \boxed{\approx 10^{13}}$$

pri malej teplote $n(\varepsilon_0) \gg n(\varepsilon_1)$

• pre $T \gg T_c$ celkový počet častíc

$$N = \int_0^\infty dE \frac{\overset{\sim\sqrt{E}}{\omega(E)}}{e^{\beta(E-\mu)}-1} = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2mkT}{\hbar^2}\right)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{x^{1/2}}{e^{-\beta\mu}e^{x}-1}}_{f(\mu)}$$

• kľúčová vec: keď zmenšujem teplotu ale držím N fixované
musím meniť μ aby mohlo • stále platiť
(μ je len technický nástroj na popis meniaceho sa počtu častíc v jednočasticových stavoch, nie chemický potenciál nejakého rezervoáru. N je fixované)

• v nejakom momente $\mu = 0$ a nevieme viacej zvyšovať!

to sa stane pri teplote $T_c > 0$. čo teraz?

• počet častíc N je funkcia teploty a má horné ohraničenie

existuje maximálny počet častíc, ktorý systém dokáže pojať

$$N_{MAX} = \frac{V}{4\pi^2} \frac{(2mkT)^{3/2}}{\hbar^2} f(0) \implies \boxed{T_c = \left(\frac{2\pi\hbar}{km}\right)\left(\frac{1}{f(0)}\frac{N}{V}\right)^{2/3}}$$

• pre $T < T_c$ sa daný počet častíc nevojde do systému!!! čo teraz?

• riešenie? pre $E=0$ je $\omega(E)$ také do $N = \int_0^\infty dE\, \omega(E) \ldots$ nepripisuje častice s $E=0$

opravíme $N = n_0 + \int_0^\infty dE\, \omega(E) \ldots$

počet častíc v základnom stave

• pre $T < T_c$ $\quad n_0 = N - N_{MAX} = N\left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right)$

$T > T_c$ $\quad n_0 = \dfrac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}$