Taylorov polynom a rozvoje

Juro Tekel juraj(dot)tekel(at)gmail(dot)com

Poznamky k prednaske o tom, co to vlasnte ten Taylorov polynom je, ako sa veci rozvijaju do radov a ako sa to cele da pouzit vo fyzike.

Januar 2006 *Pocuvadlo 2006*

Contents

1 Uvod

Prednáška má za cieľ oboznámiť stredoškolákov pre nich vhodný spôsobom s ideou a značnými možnosťami rozvoja funkcií do Taylorovho radu. V úvode sa ukáže matematické pozadie rozvoja funkcií do Taylorovho radu a sú naznačené matematické aplikácie. Zvyšok prednášky je venovaný fyzikálnemu využitiu. Ukáže sa, ako sa narába s rozvojom, ako sa zistí, koľko členov je potrebné brať do úvahy a prerieši sa niekoľko príkladov. Je dobré, aby žiaci vedeli aspoň trochu derivovať a poteší[1] ak majú aspoň matnú predstavu o tom, čo to je integrál.

Uvedené by mohlo byť náplňou série dvoch prednášok. Prvej matematickej a druhej fyzikálnej.

2 Matematicka cast

Na úvod trochu matematiky. Neberte to ako nutné zlo a určite to nepreskakujte. Je to veľmi dobrý základ pre ďalšie pochopenie použitia Taylorovho rozvoja. Majme nejakú, ľubovoľnú ale fixovanú funkciu $f(x)$. Zoberme teraz nejaký ľubovoľný bod x_0.Funkcia f tu má hodnotu $f(x_0)$. Označme konštantnú funkciu $f = f(x_0)$ ako f_0. Funkcie f a f_0 sú v bode x_0 úplne totožné. Ak sa veľmi málo vzdialime od bodu x_0, povedzme do bodu x, rozdiel funkcií f a f_0 bude nenulový. Dôležité je však že bude už pre malé x veľký v porovnaní s rozdielom $(x - x_0)$. Preto potrebujeme vyrobiť lepšiu aproximáciu funkcie f.

To môžeme urobiť tak, že funkciu f nahradíme nie jej funkčnou hodnotou v bode x_0, ale jej dotyčnicou v bode x_0. Tá má rovnicu

$$f_1(x - x_0) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x - x_0)$$

[1] Najmä pri riešení neskorších úloh

Podľa definície diferenciálu diferenciovateľnej funkcie[2] je to pre malé $x - x_0$, teda pre malé odchýlky, úplne presné. Pre väčšie[3] odchýlky už náš vzorec platiť nebude. Opäť ho treba zlepšiť. Takto prichádzame k idei, že funkcia f sa bude dať vyjadriť ako

$$f(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ... \tag{1}$$

Pre niektoré funkcie je tento rad presným vyjadrením funkčnej hodnoty v bode x pre ľubovoľné x, pre niektoré iba pre x z istého intervalu okolo bodu x_0.

Iná, fyzikálnejšia motivácia pre vzťah (1) je takáto úvaha. Polohu stojaceho bodu v čase opisuje jeho súradnica x_0. Ak sa bod hýbe rýchlosťou v, jeho poloha bude $x(t) = x_0 + vt$, ak sa pohybe so zrýchlením a bude jeho poloha v čase t $x(t) = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$. Teoreticky sa môže teleso pohybovať s rovnomerne zrýchleným, ktoré budeme charakterizovať koeficientom α Podobnými úvahami[4], ktoré nás doviedli ku vzťahu pre rovnomerne zrýchlený pohyb dostaneme vzťah pre polohu telesa v čase t

$$x(t) = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{6}\alpha t^3$$

Ani jedno ani druhé nemá byť dôkazom toho, že sa funkcia f dá do takéhoto radu rozložiť. Pre niektoré funkcie, ktorých nie je málo to skutočne nepôjde. Avšak vo fyzike a v živote sa stretávame zväčša s funkciami, ktoré majú požadované vlastnosti.

Vyjadrime teraz koeficienty a_n vo vzťahu (1). Funkciu najskôr n-krát zderivujme

$$\frac{d_n}{dx^n} f(x - x_0) = n!a_n + ... + \frac{(n + i)!}{i}(x - x_0)^i$$

Ak teraz do tohto vzťahu dosadíme za x hodnotu x_0 dostaneme vzťah pre a_n

$$a_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right]_{x=x_0}$$

Rozvoj (1) bude mať potom tvar

$$f(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right]_{x=x_0} (x - x_0) \tag{2}$$

Dôležitosť toho postupu bola naznačená už v úvode. Často je dôležité, že pre rozumnú vzdialenosť $x - x_0$ nemusíme sčítať všetky členy tohto rozvoja, ale že pri istej presnosti nám stačí zobrať iba niekoľko prvých členov. Podobné úvahy a vzorce podobné vzorcu (2) sa dajú dovodiť aj pre funkcie komplexnej premennej a pre viac rozmerné funkcie.

Na záver si povedzme, že uvedená matematická formulácia nie je úplne presná. Taylorovym polynómom nazýva matematika rozvoj

$$f(x - x_0) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right]_{x=x_0} (x - x_0) + R(x_0, N)$$

kde $R(x_0, N)$ je zvyškový člen a reprezentuje rozdiel medzi Taylorovym polynómom a funkciou. Následne Taylorova veta hovorí, že pre rozumné funkcie je $\lim_{N\to\infty} R(x_0, N) = 0$. Je niekoľko rôznych

[2] Tá je definovaná tak, že jej prírastok sa dá vyjadriť ako $f(x) - f(x_0) = \alpha(x - x_0)$+niečo, čo ide k nule rýchlejšie ako $x - x_0$, o tom sa budeme viac baviť neskôr, takže pre $x \approx x_0 \implies x - x_0 = dx$ toto niečo bude nulové a $dy = \alpha dx$

[3] Čo presne znamená väčšie záleží od konkrétneho prípadu

[4] Zrýchlenie v čase t bude $a = \alpha t$, dvojnásobnou integráciou dostaneme uvedený vzťah

tvarov, v ktorých sa zvyškový člen dá vyjadriť. My si spomeňme iba tvar $R(x_0, N) = \bar{o}\left((x - x_0)^N\right)$. To hovorí, že zvyškový člen ide pri x blížiacom sa k x_0 do nuly rýchlejšie ako $(x - x_0)^N$. Toto je ideou zanedbávania vo fyzike[5]. Nakoľko pre $x \approx x_0$ je zvyškový člen prakticky nulový, na rozdiel od ostatných členov.

Niektoré z matematických aplikácií Taylorovho rozvoja.

Výpočet súm. Sumy sa ľahko pomocou Taylorovho rozvoja riešia derivovaním alebo integrovaním člen po člene. Majme sumu $\sum a_n$. Ak nájdeme funkciu, pre ktorú platí $f(x) = \sum a_n x^n$, vyhrali sme. Stačí dosadiť za x vhodné číslo aj to. To však často nejde. Možno sa nám však podarí nájsť funkciu $g(x) = \sum a_n n x^{n-1}$, prípadne nejakú inú funkciu v podobnom tvare. Potom len funkciu $g(x)$ zderivujeme[6] a nájdeme patričnú funkčnú hodnotu.

Výpočet limít. Tu sa využíva zápis Tayloroho polynómu v tvare

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x - x_0)^i + \bar{o}\left((x - x_0)^n\right)$$

Vhodným podielom sa tom príde k limite.

Priklad 1. *Vypočítajte limitu* $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$.

Riesenie. Funkciu $\sin x$ si rozvinieme do radu okolo bodu 0 a počítame

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \bar{o}(x)}{x} = 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{\bar{o}(x)}{x} = 1$$

Priklad 2. *Vypočítajte limitu* $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$.

Riesenie. Tu je problém, že by sme potrebovali rozvíjať okolo nekonečna. Funkciu e^x si rozvinieme do plného radu okolo bodu 0. Limita má potom tvar

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1 + x + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + ...}{x^n} = \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x^{n-1}} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{x}{(n+1)!} + ...\right) \end{aligned}$$

Vieme, že takáto limita diverguje. Exponenciálna funkcia preto rastie do nekonečna rýchlejšie, ako ľubovoľná mocnina.

Numerické výpočty funkčných hodnôt a integrálov. Často sa stáva, že nepotrebujeme vedieť presnú hodnotu nejakej veličiny. Zaujíma nás len s určitou presnosťou. Potom rozvinieme to čo hľadáme a zoberieme len určitý počet členov.

Priklad 3. *Vypočítajte* $\sin 3$.

Riesenie. Riešenie Funkciu $\sin x$ rozvinieme do radu okolo hodnoty π. Ten má tvar

$$\sin(x - \pi) = -(x - \pi) + \frac{1}{6}(x - \pi)^3 - ...$$

Zanedbáme teraz vyššie členy. Dostávame ta hodnotu

$$\sin 3 = -0,141592 + \frac{1}{6} 0.141592^3 = 0,141112$$

[5] Podrobnejšie úvahy na túto tému nájdete o niekoľko riadkov ďalej.

[6] Prípadne s ňou spravme inú potrebnú operáciu.

Riešenie diferenciálnych rovníc. Tu si hľadanú funkciu napíšeme ako rad s neznámymi koeficientmi $\sum a_n x^n$, zderivujeme člen po člene, dosadíme do rovnice a vyriešime metódou neurčitých koeficientov.

Priklad 4. *Nájdite riešenie rovnice $y'(x) = by$.*

Riesenie. Riešenie tejto rovnice dobre poznáme. Je to funkcia $y = ce^{bx}$. Skúsme ju však nájsť. Podľa návodu si napíšme hľadanú funkciu y ako rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Jeho derivovaním člen po člene nájdeme deriváciu $y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$. Dosadením do rovnice zisťujeme, že

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n &= b\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+1}(n+1) - ba_n\right] x^n &= 0 \end{aligned}$$

Na základe toho dostávame pre koeficienty rekurentný vzťah

$$\begin{aligned} a_{n+1}(n+1) - ba_n &= 0 \\ a_{n+1} &= \frac{b}{n+1} a_n \end{aligned}$$

Pričom máme voľnosť vo výbere prvého členu a_0. Ten by sme určili s počiatočnej podmienky. Ľahko sa presvedčíme, že

$$a_n = \frac{b^n a_0}{n!}$$

Takže riešenie rovnice má nakoniec tvar

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n a_0}{n!} x^n = a_0 e^{bx}$$

Pred tým, ako sa pustíme do fyzikálnych aplikácií, odporúčam si prerieśiť niekoľko matematických úloh spojených s Taylorovim polynómom.

Priklad 5. *Odvoďte týchto niekoľko základných rozvojov*

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \mathit{kde} \binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)$$

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \end{aligned}$$

Priklad 6. *Odvoďte tzv. Eulerov vzťah $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.*

Priklad 7. *Rozvite do radu nasledujúce funkcie*

$$\frac{1}{1+x}; \frac{1}{(1+x)^2}; \cos^2 x^2; \frac{1}{(1-x-x^2)^2}; \arccos(1-2x^2); \ln(x+\sqrt{x^2+1}); \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Priklad 8. *Vypočítajte nasledujúce sumy*

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-...=?;\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{2^n}=?;\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\frac{1}{3^n}=?;\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}=?$$

Priklad 9. *Nájdite rozvoj funkcie* $\arctan x$ *a pomocou neho nájdite vzorec pre výpočet čísla* π.

Priklad 10. *Nájdite riešenie diferenciálnych rovníc* $y''(x)=-y, y'(x)=yx$.

3 Fyzikalna cast

A čo na to celé fyzika? No je z toho samozrejme veľmi, veľmi rada. Ako určite viete, fyzici veľmi radi zanedbávajú. Lepšie povedané, nachádzajú vhodnú aproximáciu skutočnosti. Veľmi dobrým príkladom je známe **matematické kyvadlo**. Iste viete, že pre malé výchylky od rovnovážnej polohy koná kyvadlo harmonické kmity s periódou $T=2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$. Rovnica, ktorá popisuje pohyb matematického kyvadla je

$$ml\frac{d^2\varphi}{d\varphi^2}=-mg\sin\varphi$$

Táto rovnica nemá riešenie vyjadriteľné pomocou klasických funkcií. Jej riešenie je funkcia, ktorá je definovaná ako riešenia takejto rovnice. Rozviňme si teraz sínus na pravej strane rovnice do Taylorovho radu

$$ml\frac{d^2\varphi}{d\varphi^2}=-mg\left(\varphi-\frac{\varphi^3}{6}+\frac{\varphi^5}{24}-...\right) \tag{3}$$

Budeme teraz zmenšovať φ a sledovať, ako sa budú meniť veľkosti jednotlivých členov. Členy s veľkou mocninou budú malé, pretože v ich menovateli bude faktoriál veľmi veľkého čísla[7]. Všetky členy sa budú so zmenšujúcim sa φ zmenšovať, ale nie všetky rovnako rýchlo.

Sledujme napríklad, ako sa bude meniť člen φ^7 a φ^9. Pre $\varphi=1$ sú obe 1. Pre $\varphi=\frac{1}{2}$ bude $\varphi^7=\frac{1}{128}$ a $\varphi^9=\frac{1}{512}$. Pre $\varphi=\frac{1}{10}$ bude $\varphi^7=\frac{1}{10^7}$ a $\varphi^9=\frac{1}{10^9}$. Ich pomer bude $\varphi^7/\varphi^9=\frac{1}{\varphi^2}$. Pre malé φ bude tento pomer veľmi veľký a teda φ^7 bude oveľa väčšie ako φ^9.

Všeobecne, členy s väčšou mocninou budú malé, takmer nulové oveľa skôr ako ostatné. Preto ich budeme môcť pre malé φ zanedbať. Takto postupne pre ozaj malé φ bude stačiť zobrať prvý člen. Tým dostávame známu rovnicu

$$ml\frac{d^2\varphi}{d\varphi^2}=-mg\varphi$$

Ktorá má riešenie dobre známe riešenie

$$\varphi(t)=\varphi_0\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

Čo je dobre známa rovnica matematického kyvadla pre malé výchylky. Ak by sme chceli spresniť toto riešenie, zobrali by sme v rozvoji (3) ďalšie členy Riešenie takejto rovnice však nebude vôbec jednoduché, bude rovnako zložité ako riešenie tej pôvodnej.

Taylorov rozvoj sa vo využíva vždy, keď je niečo veľmi malé. Ako jeden príklad sme si uviedli matematické kyvadlo. Pozrime sa teraz na **elektrický dipól**. Ako mozno viete, je to dvojica nábojov

[7] Môže si skúsiť ukázať, že limita $\lim_{n\to\infty}x^n/n!=0$ pre ľubovoľné konečné x.

q a $-q$ vo vzájomnej vzdialenosti d. Tiež iste viete, že bodový náboj vytvára v svojom okolí pole s intenzitou meniacou sa podľa vzťahu

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

DOPLNIT

Planckov zákon žiarenia čierneho telesa spôsobil obrovskú revolúciu vo fyzike. Ide vlastne o zovšeobecnením dvoch iných zákonov, ktoré mali obmedzenú platnosť. Konkrétne Wienov zákon, platiaci pre krátke vlnové dĺžky a Rayleigh-Jeansov zákon, platiaci pre veľké vlnové dĺžky. Pozrime sa na to bližšie.

Planckov zákon má tvar

$$f_P\left(\lambda\right) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \tag{4}$$

Upravme vzťah na tvar

$$f_P\left(\lambda\right) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}\frac{1}{1 - \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}}$$

Rozviňme teraz posledný zlomok do radu

$$f_P\left(\lambda\right) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}\left(1 + \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}} + \frac{1}{e^{\frac{2hc}{\lambda kT}}} + ...\right)$$

Pre malé vlnové dĺžky je výraz $e^{\frac{hc}{\lambda kT}}$ veľmi veľký a preto môžeme celú zátvorku až na jednotku zanedbať. Tým dostávame Wienov zákon.

Rozviňme druhý zlomok vo vzťahu (4)do Taylorovho radu

$$\begin{aligned} f_P\left(\lambda\right) &= \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{1 + \frac{hc}{\lambda kT} + \frac{1}{2}\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)^2 + ... - 1} = \\ &= \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\frac{hc}{\lambda kT} + \frac{1}{2}\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)^2 + ...} \end{aligned}$$

Pre veľmi veľké λ môžeme v menovateli zanedbať všetky členy okrem prvého a dostávame presne Rayleigh-Jeansov zákon.

4 Poruchova metoda

Povedzme si ešte o niečom, čo tiež súvisí s rozvojom do radov a má vo fyzike veľmi široké využitie. Ide o poruchovú metódu. O čo ide? Výsledky úloh vychádzajú ako funkcie viacerých parametrov. Niekedy je niektorý parameter "hlavný", napríklad čas, vzdialenosť od istého miesta, teplota. Inokedy nie. Tak či tak môžeme rozviť výslednú funkciu do radu podľa ľubovoľného parametra, ktorý sa môže meniť. Ale to je moc všeobecné, poďme sa pozrieť na nejaký konkrétny prípad. Nasledujúci text je písaný trochu zložitejšie, preto ak rozumiete, môžete poznámky preskakovať, ak nie, kľudne ich čítajte aj dva krát, mali by vám pomôcť.

Tým môže byť napríklad pohyb v odporovom prostredí. Pre jednoduchosť uvažujme iba pohyb v jednom rozmere. Napríklad voľný pád. Vo vzduchu budú na padajúce teleso pôsobiť dve sily. Okrem tiažovej aj odporová sila prostredia. Pohybová rovnica bude teda vyzerať[8]

[8] Ide o diferenciálnu rovnicu. Vieme, že zrýchlenie a je druhou deriváciou polohy podľa času. Tak isto rýchlosť je prvá derivácia polohy podľa času.

$$\begin{aligned} ma &= m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg + \lambda v^2 = -mg + \lambda\left(\frac{dx}{dt^2}\right)^2 \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -g + \gamma\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \end{aligned}$$

Ide o nelineárnu rovnicu, ktorá sa veľmi ťažko rieši. Vieme, že bude mať riešenie v tvare $x = x(t, \gamma)$.[9] Rozviňme si teda toto riešenie do radu podľa mocnín γ. Tento rad bude mať tvar[10]

$$x(t, \gamma) = x_0(t) + \gamma x_1(t) + \gamma^2 x_2(t) + \gamma^3 x_3(t) + ... \tag{5}$$

Ak teraz zderivujeme takto vyjadrené $x(t, \gamma)$,[11] dostaneme

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \gamma\frac{dx_1}{dt} + \gamma^2\frac{dx_2}{dt} + \gamma^3\frac{dx_3}{dt} + ...$$

Túto rovnicu vieme opäť jednoducho riešiť a jej riešenie je $x_1(t) = \frac{1}{12}g^2t^4 + c_1t + c_2$. Ak chceme, aby sa teleso v čase $t = 0$, nachádzalo vo výške h a malo nulovú rýchlosť, dostávame $c_1 = c_2 = 0$. Takto by sme mohli postupovať pre ďalšie funkcie.

Opäť však dôležitosť metódy nie je vo vyjadrení všetkých koeficientov a sčítaní všetkých členov. Práve naopak. V tom, že to nespravíme. Čo keď bude odpor vzduchu veľmi malý. To tak aj ozaj je. Pre malé rýchlosti, keď je odporová sila nezanedbateľná, ale malá. Prípadne pre ťažké telesá. Vtedy v rade (5) nemusíme uvažovať všetky členy, ale iba niekoľko. Napríklad pre hrubé priblíženie iba prvé dva. Potom

$$x(t) = x_0(t) + \gamma x_1(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{12}\gamma g^2t^4$$

Vidíme teda, že malý odpor trochu spomalí pád telesa. Avšak pre veľké časy je náš vzťah jasne zlý, pretože by sa teleso začalo pohybovať smerom nahor. V takom prípade musíme zobrať do úvahy viac členov rozvoja.

Táto metóda je vo fyzike veľmi rozšírená. Hovorí sa jej poruchová, pretože oprava, ktorú robíme, je vlastne malou poruchou k pôvodnému stavu bez nej. Počet členov obsahujúci koeficient poruchy určuje rád poruchovej metódy. V našom prípade bol poruchou odpor vzduch a uskutočnili sme rozbor poruchovou metódou do prvého rádu.

Priklad 11. *Vypocitajte opravu najnizsieho radu k periode matematickeho kyvadla. To tak, ze zoberiete dalsi clen rozvoja funkcie $sin(x)$ a budete ho povazovat za poruchu.*

5 Rozne priklady

To bolo niekoľko príkladov na použitie rozvoja vo fyzike. V nasledujúcich úlohách sa opäť úspešne použije rozvoj do Taylorovho radu.

Priklad 12. *Rozviňte do radu vzťah pre výpočet relativistickej kinetickej energie a urobte priblíženie $v \ll c$.*

Riesenie. Pre celkovú energiu telesa, pohybujúceho sa rýchlosťou v platí relativistický vzťah

$$mc^2 = m_0c^2 + E_K$$

Čím dostávame pre relativistickú kinetickú energiu

$$E_K = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$$

Výraz v zátvorke rozvinieme do Taylorovho radu

$$E_K = m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + ... - 1\right)$$

Pre malé rýchlosti zoberieme iba prvý člen rozvoja, čím dostaneme klasickú kinetickú energiu.

Priklad 13. *Nádoba objemu V_0, v ktorej bol tak p_0 a teplota T_0 sa mierne adiabaticky roztiahla, napríklad pohnutím piestu. To je teraz jedno. Ako sa zmení teplota a tlak vo vnútri nádoby?*

Riesenie. Vieme, že pri adiabatickom deji sa nemení súčin pV^κ. Tak isto pre ideálny plyn platí stavová rovnica $\frac{pV}{T} = const$. Nádoba sa mierne roztiahla, takže jej objem sa zmenil na $V = V_0 + \Delta V$, pričom ΔV je veľmi malé v porovnaní s V_0. S vzťahu pre adiabatický dej môžeme priamo písať

$$\begin{aligned} pV^\kappa &= p_0 V_0^\kappa \\ p &= p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + \Delta V} \right)^\kappa = p_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^\kappa} \end{aligned}$$

Použijeme Taylorov rozvoj

$$p = p_0 \left(1 - \kappa \frac{\Delta V}{V_0} + \frac{1}{2} \kappa (\kappa - 1) \left(\frac{\Delta V}{V_0} \right)^2 - ... \right)$$

Teraz môžeme urobiť niekoľko zanedbaní. Môžeme si povedať, že $\frac{\Delta V}{V_0}$ je zanedbateľný a potom sa nič nezmení. To sme ale nechceli, lebo vieme, že predsa sa niečo menilo. Tak povieme, že až $\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2$ je zanedbateľný a zmena tlaku potom bude

$$\Delta p = -p_0 \kappa \frac{\Delta V}{V_0}$$

Zmenu teploty dostaneme zo stavovej rovnice

$$\begin{aligned} \frac{pV}{T} &= \frac{p_0 V_0}{T_0} \\ T &= T_0 \frac{p}{p_0} \frac{V}{V_0} \end{aligned}$$

Použitím rovnice adiabatického deja dostávame

$$\begin{aligned} pV^\kappa &= p_0 V_0^\kappa \\ \frac{p}{p_0} &= \left(\frac{V_0}{V} \right)^\kappa \end{aligned}$$

A teda

$$T = T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^\kappa \frac{V}{V_0} = T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\kappa - 1} = T_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^{\kappa - 1}}$$

Opäť použijeme rozvoj do Taylorovho radu a dostávame

$$T = T_0 \left(1 - (\kappa - 1) \frac{\Delta V}{V_0} + \frac{1}{2} (\kappa - 1)(\kappa - 2) \left(\frac{\Delta V}{V_0} \right)^2 - ... \right)$$

Opäť prichádzame k záveru, že zmena teploty bude pri malých zmenách objemu

$$\Delta T = -T_0 (\kappa - 1) \frac{\Delta V}{V_0}$$

Priklad 14. *Do U -trubice nalejeme kvapalinu hustoty ρ a objemu V. Po ustálení obe ramená vo výške l nad hladinou kvapaliny uzavrieme. Vypočítajte periódu malých kmitov Dej považujte za a) izotermický, b) adiabatický. Ktorá situácia sa viac približuje k skutočnosti?*

Riesenie. Úlohu riešme najskôr pre adiabatický dej v trubici. Nechajme hladinu v jednom z ramien trubice poklesnúť o malé x. Tým sa objem v tomto ramene zväčšil o $\Delta V = xS$. Podľa predchádzajúcej úlohy bude tlak vzduchu v tejto časti ramena po malej zmene

$$p_1 = p_0 \left(1 - \kappa \frac{\Delta V}{V_0}\right)$$

Hladina v druhom ramene trubice vystúpila o x[12]. Objem druhého ramena sa potom zmenšil o $\Delta V = xS$ a tlak sa zmenil na hodnotu

$$p_2 = p_0 \left(1 + \kappa \frac{\Delta V}{V_0}\right)$$

Za kladný smer výchylky považujme smer nahor. Na kladne vychýlenú hladinu pôsobí sila $F_2 = -p_2 S$, kde znamienko naznačuje smer pôsobenia sily nadol. Skrz kvapalinu tu pôsobí nahor sila $F_1 = p_1 S$. Výsledná sila bude teda

$$F_v = S\left(p_2 - p_1\right) = -2Sp_0\kappa \frac{\Delta V}{V_0}$$

Okrem tejto sily tu bude ešte pôsobiť gravitačná sila $F_G = -\rho S 2xg$. Celková sila pôsobiaca na kvapalinu bude teda

$$F = F_V + F_G = -2Sp_0\kappa \frac{\Delta V}{V_0} - \rho S 2xg = -2S\left(\frac{p_0\kappa}{l} + \rho g\right)x$$

Ako vidíme, sila je úmerná výchylke, pôjde teda o malé kmity, ktorých periódu vieme vypočítať. Musíme si ale dávať pozor na to, že musí kmitať celá kvapalina.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{V\rho}{2S\left(\frac{p_0\kappa}{l} + \rho g\right)}}$$

Pre izotermický dej bude platiť taký istý vzorec, avšak s $\kappa = 1$. Trocha diskusie na záver. Kedy môžeme dej považovať za adiabatický? Keď prebieha dostatočne rýchlo. Vtedy si sústava nestihne vymeniť so svojim okolím žiadne teplo. Takže uvedený vzorec bude platiť, ak bude perióda kmitov veľmi malá. Naopak, ak dej prebieha veľmi pomaly, môžeme ho považovať za izotermický, vtedy si plyn s okolím stihne vymeniť teplo tak, že sa mu nebude meniť teplota. Pre veľmi veľké periódy bude platiť vzorec s $\kappa = 1$.

Priklad 15. *Vypočítajte periódu malých kmitov telesa s nábojom $-q$ a hmotnosťou po osi rovnomerne nabitého prstenca celkovým nábojom Q.*

Riesenie. Pre intenzitu elektrického poľa na osi takého prstenca vo vzdialenosti x od stredu platí vzťah

$$E\left(x\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{x}{R^2 + x^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}x\frac{1}{1 + \frac{x^2}{R^2}}$$

kde R je polomer prstenca. Rozviňme do radu posledný zlomok

$$E\left(x\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}x\left(1 - \frac{x^2}{R^2} + \frac{x^4}{R^4} - ...\right)$$

[12] Predpokladáme nestlačiteľnú kvapalinu.

Pre malé výchylky bude celá zátvorka až na prvý člen zanedbateľne veľká. Potom sila, ktorá pôsobí na náboj $-q$ vo vzdialenosti x od stredu prstenca bude

$$F(x) = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R^3} x$$

Bude preto okolo stredu kmitať s periódou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 m R^3}{Qq}}$$

Priklad 16. *Vypočítajte periódu malých kmitov telieska fixovaného na elipsu, parabolu, hyperbolu, cykloidu.*

Riesenie. Nie sme predsa žiadny mumáci, vyriešme teda úlohu hneď pre všeobecnú krivku danú predpisom $y = f(x)$. Vieme, že teleso viazané na túto krivku bude konať kmitavý pohyb len a iba v okolí lokálnych miním funkcie, teda keď $\frac{df}{dx}(0) = 0$ a $\frac{d^2 f}{dx^2}(0) > 0$. Položme teda sústavu súradníc tak, aby bolo v bode $x = 0$ lokálne minimum funkcie $f(x)$ a funkčná hodnota bola nulová. Potenciálna energia po vychýlení o x z rovnovážnej polohy bude[13]

$$U = mgf(x)$$

Vieme, že sila, pôsobiaca na teleso v poli potenciálne energie $U(x)$ je

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Pre silu v našom prípade potom dostávame

$$F(x) = -mg\frac{df}{dx} = -mgf'(x)$$

Rozviňme teraz deriváciu funkcie f do radu. Nič nám v tom nebráni, derivácia je funkcia ako každá iná a preto ju môžeme rozvíjať.

$$f'(x) = f'(0) + \frac{df'}{dx}(0)\, x + ...$$

Vieme, že prvý člen je nulový, nakoľko rozvíjame v okolí lokálneho minima. Členy označené tromi bodkami môžeme pre malé x zanedbať, čím dostaneme pre malé výchylky silu

$$F(x) = -mg\frac{df'}{dx}(0)\, x = -mg\frac{d^2 f}{dx^2}(0)\, x$$

Podľa predpokladov je to vzťah v tvare $F = -kx$, kde $k > 0$, takže perióda kmitov bude v takomto prípade

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg\frac{d^2 f}{dx^2}(0)}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\frac{1}{\frac{d^2 f}{dx^2}(0)}}$$

Veličina $\frac{1}{\frac{d^2 f}{dx^2}}$ sa nazýva polomer krivosti a je to polomer kružnice, ktorá sa v danom bode dotýka funkcie. Dôležité je, že ak je teleso viazané na krivku $f(x)$, bude v malých okoliach jej lokálnych miním kmitať, ako matematické kyvadlo s dĺžkou závesu rovnou polomeru krivosti funkcie $f(x)$ v danom bode. Teraz je už jednoduché dosť k odpovediam na otázky zo zadania.

[13] Za nulovú hladinu potenciálnej energie berieme $y = 0$.

Priklad 17. *Odvoďte barometrickú formulu.*

Riesenie. Predstavme si vo výške h malý kúsok vzduchu, napríklad v tvare valca s podstavou S a výškou Δh. Na tento valec pôsobia tri sily. V prvom rade tiažová veľkosti $\rho S \Delta h g$ a dve tlakové. Zospodu sila veľkosti $p(h) S$ a z vrchu sila veľkosti $p(h + \Delta h) S$. Tieto sily sú v rovnováhe, nakoľko sa kúsok vzduchu nehýbe. Platí teda

$$\begin{aligned} p(h) S &= p(h + \Delta h) S + \rho S \Delta h g \\ p(h) - p(h + \Delta h) &= \rho \Delta h g \end{aligned}$$

Potom rozvinieme do radu funkciu $p(h)$

$$\begin{aligned} p(h) - p(h) - \frac{dp}{dh}\Delta h - \frac{1}{2}\frac{d^2p}{dh^2}\Delta h^2 - ... &= \rho \Delta h g \\ -\frac{dp}{dh} - \frac{1}{2}\frac{d^2p}{dh^2}\Delta h - ... &= \rho g \end{aligned}$$

Samozrejme tlak vo výške h by nemal závisieť od toho, aký veľký testovací kúsok vzduchu berieme do úvahy. Preto ho musíme zobrať taký malý, aby sa v porovnaní s ostatnými členmi v tejto rovnici druhý člen dal zanedbať. Potom dostávame

$$-\frac{dp}{dh} = \rho g$$

Ostáva už len vyjadriť hustotu vo výške h. Použijeme pri tom stavovú rovnicu $pV = NkT$.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{N}\frac{p}{kT} = \frac{m_0 p}{kT}$$

kde m_0 je hmotnosť jednej molekuly vzduchu. Dopočítame potom

$$p'(h) = -\frac{m_0 p}{kT} g$$

Takúto rovnicu sme už raz riešili a vieme teda, že má riešenie

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{m_0 g}{kT} h}$$