

# Základy fyziky (1) - Domaca úloha 5

Akkoľvek otázky smelo smerujte na  
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Aktualizovaná 22. októbra 2020

Odovzdať najneskôr 29.10.2020

Dva príklady, zvyšok ako bonus.

**Príklad 1.** Družica sa pohybuje po kruhovej dráhe okolo planéty hmotnosti  $M$  vo vzdialenosti  $H$  od jej stredu.

- Aký čas trvá družici jeden obeh okolo planéty?
- Zistite, v akej v akej výške nad Zemou je tento čas rovný jednému dňu. Premyslite si, že to znamená že družica bude stále nad tým istým miestom na Zemi.<sup>1</sup>

**Príklad 2.** V tomto príklade bude úlohou dopočítať niekoľko vecí, ktoré sa použili na prednáške.

- Z vyjadrenia

$$r(\theta) = \frac{L^2/(km^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (1)$$

nájdite vzťah pre  $\dot{r}$ . Nezabudnite, že viete  $\dot{\theta} = L/mr^2$ . Ukážte, že pre  $\theta = 0$  dostaneme  $\dot{r} = 0$ . To sa dalo očakávať, keďže sme na prednáške zistili že toto je miesto, v ktorom sa teleso nachádza najbližšie k stredu.

Dosaďte  $r$  pre  $\theta = 0$  do vzťahu pre celkovú energiu (alebo do vzťahu pre efektívny potenciál) a ukážte, že pre energiu telesa platí

$$E = \frac{k^2 m^3}{2L^2} (\varepsilon^2 - 1) . \quad (2)$$

- Ukážte, že z vyjadrenia pre kartézke súradnice  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  dostaneme

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad (3)$$

Nájdite hodnoty parametrov  $x_0$ ,  $a$ ,  $b$ .

- Ukážte, že pre hlavnú polos elipsy  $a$  platí

$$a = -\frac{km}{2E} . \quad (4)$$

**Príklad 3.** Ukážte, že v potenciály  $V(r) = -mk/r$  je nasledujúci vektor konštantný.

$$\vec{R} = \frac{1}{mk} \dot{\vec{x}} \times \vec{L} - \frac{\vec{x}}{r} .$$

Tomuto vektoru sa hovorí Laplace-Runge-Lentz vektor a je špeciálnou zachovávajúcou sa veličinou pre  $1/r$  potenciál. Premyslite si, kam smeruje tento vektor.

**Príklad 4** (Stabilita kruhových orbít). Majme potenciál v tvare  $V(r) = -km/r^n$ .

- Napište vzťah pre efektívny potenciál a nájdite podmienku pre jeho extrém.
- Vypočítajte druhú deriváciu efektívneho potenciálu v tomto bode a zistite, za akých podmienok je tento extrém minimom. Interpretujte tento výsledok ako podmienku pre stabilitu kruhovej orbity.

<sup>1</sup>Číselne hodnoty gravitačnej konštanty a hmotnosti zeme rada prezradí Wikipedia.