Základy fyziky (1) - Domaca Úloha 1

Akékoľvek otázky smelo smerujte na
`juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

Príklad 1. Teleso sa v rovine $z = 0$ pohybuje po krivke zadanej rovnicou

$$F(x, y) = 0$$

zadaným časovým predpisom

$$\vec{x}(t) = \big(x(t), y(t)\big) \ .$$

Ukážte, že

- rýchlosť telesa je v každom momente v smere dotyčnice ku krivke v danom bode,
- zrýchlenie telesa má v každom momente zložku v smere dotyčnice ku krivke veľkosti $|\dot{\vec{v}}|$,
- zrýchlenie telesa má v každom momente zložku v smere normály na krivke veľkosti

  $$\frac{|\vec{v}|^2}{R} \ ,$$

  kde R je polomer krivosti krivky v danom bode.

Riešenie.

- $$\vec{v} = v\vec{\tau} \ .$$
- Zrýchlenie je derivácia rýchlosti a teda

  $$\vec{a} = \dot{v}\vec{\tau} + v\frac{d}{dt}\vec{\tau} \ .$$

  Prvý člen je presne to, čo sme chceli ukázať.
- Tu potrebujeme druhý člen. To ako sa mení v čase vektor $\vec{\tau}$ závisí od toho, ako sa po krivke teleso pohybuje. Ale dá sa pozrieť aj na to, ako táto zmena závisí čisto od vlastností tej krivky. Na to zavedieme paramter s, ktorý meria vzdialenosť pozdĺž krivky od nejakého referenčného bodu. Potom pre prírastok ds tohto parametra platí

  $$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

  a môžeme písať

  $$\frac{d}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} \ .$$

  Nemalo by byť ťažké rozmysliet, že $\dot{s} = v$ a to, že $d\tau/ds$ už závisí iba od toho, ako naša krivka vyzerá a nie od toho, ako ňou teleso prechádza. Počítame

  $$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{x}\frac{dx}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{dx}\frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{d\vec{\tau}}{dx}\frac{1}{\sqrt{1 + (f')^2}} \ .$$

Z explicitného tvaru τ dostávame

$$\frac{d\vec{\tau}}{dx} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\frac{1}{(1+(f')^2)^{3/2}}2f'f'' \\ \frac{f''}{\sqrt{1+(f')^2}} - f'\frac{1}{2}\frac{1}{(1+(f')^2)^{3/2}}2f'f'' \end{pmatrix}$$

čo po úpravách dá

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{f''}{(1+(f')^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} -f' \\ 1 \end{pmatrix}$$

a teda

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = -\frac{f''}{(1+(f')^2)^{3/2}}\vec{n} \ .$$

Teraz ideme hľadať kružnicu, ktorá v danom bode (x_0, y_0) do druhého rádu aproximuje funkciu $f(x)$. Rozvoj tejto funckie je

$$f(x) = y_0 + f' \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}f'' \cdot (x - x_0)^2$$

(kde f', f'' sú derivácie v bode x_0), rozvoj všeobecnej kružnice $(x - x_R)^2 + (y - y_R)^2 = R^2$ okolo boud (x_0, y_0) je

$$y = y_R \pm \sqrt{R - (x_0 - x_R)^2} \mp \frac{x_0 - x_R}{\sqrt{R - (x_0 - x_R)^2}}(x - x_0) \mp \frac{1}{2}\frac{R^2}{(R - (x_0 - x_R)^2)^{3/2}}(x - x_0)^2 \ .$$

Požiadavka, aby v predchádzajúcich dvoch vzťahoch platilo $y = f(x)$ je sústavou troch rovníc o troch neznámych x_R, y_R, R, z ktorej dostávame

$$R = \frac{(1 + (f')^2)^{3/2}}{y''} \ .$$

K tomu sme si rozmysleli, že pre kladnú druhú deriváciu musíme zobrať záporné znamieko, pre zápornú druhú deriváciu kladné znamienko.

Skôr ako sa pustíme ďalej si rozmyslime, čo tieto znamienka znamenajú. Kladné znamienko znamená, že berieme hornú polovicu kružnice, záporné naopak spodnú. To znamená, že funckie s kladnou deriváciou v mieste x_0 sú aproximované spodnou časťou kružnice, tj. kružnica sa nachádza nad krivkou. Funkcie so záporným znamienkom naopak. To znamená, že kružnica, ktorá aproximuje danú krivku leží v smere, ktorým sa krivka zakrivuje - leží v konvexnej časti.

Dohromady teda

$$\vec{a} = v\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n} \ ,$$

s tým, že vektor $\vec{\tau}$ berieme v smere pohybu telesa a vektor $\vec{n}$ berieme do zakrivenia krivky.