

Základy fyziky (1)

Domaca Úloha 3

Akkoľvek otázky smelo smerujte na
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Aktualizovaná 12. októbra 2021

Odovzdať najneskôr 22.10.2021

Z nasledujúcich príkladov si vyberte dva. Ostatné sú potom šanca získať bonusové body.

Príklad 1. Vyjadrite konštanty v riešení pohybových rovníc pre harmonický oscilátor

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (1)$$

pomocou počiatočnej polohy a počiatočnej rýchlosti x_0, v_0 . Napište toto riešenie v tvare

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (2)$$

a nájdite vyjadrenie pre A, B cez x_0, v_0 . Vyjadrite riešenie v tvare

$$x(t) = X_0 \sin(\omega t + \phi_0) \quad (3)$$

a nájdite vyjadrenie pre X_0, ϕ_0 cez x_0, v_0 .

Ukážte, že pre reálne počiatočné podmienky je riešenie (1) vždy reálne.

Príklad 2. Ak považujeme matematické kyvadlo za harmonický oscilátor, priblíženie $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ platí len pre malé výchylky x . Ak je x_0 maximálna výchylka v x -ovom smere, bezrozmený parameter úlohy je $\xi = x_0/l$ a perióda kmitov má tvar

$$T = f(\xi) \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Vieme, že konštantný člen v rozvoji $f(\xi)$ je 2π . Z vzťahu

$$T = 4 \int_0^{x_0} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(V(x_0) - V(x))}}$$

s príslušným $V(x)$ pre matematické kyvadlo nájdite ďalší netriviálny člen tohto rozvoja.

Príklad 3. Teleso vrhneme rýchlosťou v_0 šikmo pod uhlom α a teda $\vec{x}(0) = (0, 0, 0)$, $\vec{v}(0) = (v \cos \alpha, v \sin \alpha, 0)$. Teleso sa bude pohybovať v gravitačnom poli $\vec{F} = (0, -mg, 0)$.

- Zapíšte a vyriešte pohybové rovnice v tomto prípade. Vyjadrite dráhu telesa ako $y(x)$ a ukážte, že ide o parabolu.
- Za aký čas teleso dopadne? Ako ďaleko dopadne? Do akej maximálnej výšky sa teleso dostane? Pre aké hodnoty uhla α sú tieto výsledky najväčšie?
- Teleso hádžeme rovnako ako predtým, ale pred nami sa nachádza kopec so sklonom $\beta < \alpha$. Do akej vzdialenosti hore kopcom teleso doletí?
- Ako najďalej pozdĺž kopca vieme teleso vyhodiť?