

Základy fyziky (1) - Domaca úloha 5

Akkoľvek otázky smelo smerujte na
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Aktualizovaná 2. novembra 2021

Odozdať najneskôr 5.11.2021

Dva príklady, zvyšok ako bonus.

Príklad 1. Družica sa pohybuje po kruhovej dráhe okolo planéty hmotnosti M vo vzdialenosti H od jej stredu.

- Aký čas trvá družici jeden obeh okolo planéty?
- Zistite, v akej v akej výške nad Zemou je tento čas rovný jednému dňu. Premyslite si, že to znamená že družica bude stále nad tým istým miestom na Zemi.¹

Príklad 2. V tomto príklade bude úlohou dopočítať niekoľko vecí, ktoré sa použili na prednáške.

- Z vyjadrenia

$$r(\theta) = \frac{L^2/(km^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (1)$$

nájdite vzťah pre \dot{r} . Nezabudnite, že viete $\dot{\theta} = L/mr^2$. Ukážte, že pre $\theta = 0$ dostaneme $\dot{r} = 0$. To sa dalo očakávať, keďže sme na prednáške zistili že toto je miesto, v ktorom sa teleso nachádza najbližšie k stredu.

Dosaďte r pre $\theta = 0$ do vzťahu pre celkovú energiu (alebo do vzťahu pre efektívny potenciál) a ukážte, že pre energiu telesa platí

$$E = \frac{k^2 m^3}{2L^2} (\varepsilon^2 - 1) . \quad (2)$$

- Ukážte, že z vyjadrenia pre kartézke súradnice $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ dostaneme

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad (3)$$

Nájdite hodnoty parametrov x_0, a, b .

- Ukážte, že pre hlavnú polos elipsy a platí

$$a = -\frac{km}{2E} . \quad (4)$$

Príklad 3. Ukážte, že v potenciály $V(r) = -mk/r$ je nasledujúci vektor konštantný.

$$\vec{R} = \frac{1}{mk} \dot{\vec{x}} \times \vec{L} - \frac{\vec{x}}{r} .$$

Tomuto vektoru sa hovorí Laplace-Runge-Lentz vektor a je špeciálnou zachovávajúcou sa veličinou pre $1/r$ potenciál. Premyslite si, kam smeruje tento vektor.

Príklad 4 (Stabilita kruhových orbít). Majme potenciál v tvare $V(r) = -km/r^n$.

- Napíšte vzťah pre efektívny potenciál a nájdite podmienku pre jeho extrém.
- Vypočítajte druhú deriváciu efektívneho potenciálu v tomto bode a zistite, za akých podmienok je tento extrém minimom. Interpretujte tento výsledok ako podmienku pre stabilitu kruhovej orbity.

¹Číselne hodnoty gravitačnej konštanty a hmotnosti zeme rada prezradí Wikipedia.