Základy fyziky (2)
Cvičenie 1

Akékoľvek otázky smelo smerujte na
`juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

Cvičenie bolo 16.2.2022

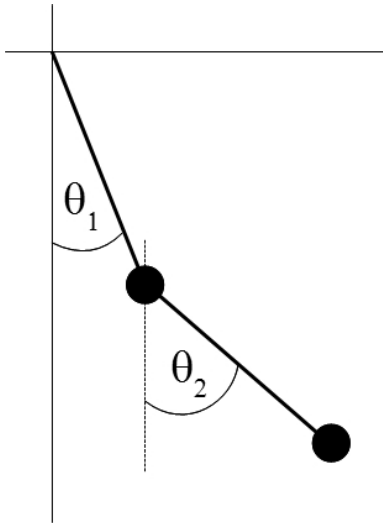
Príklad 1. Majme teliesko hmotnosti m, ktoré sa bez trenia môže pohybovať po zvislom kružnicovom ráme s polomerom R. Sústava sa nachádza v homogénnom gravitačnom poli a otáča sa okolo zvislej osi uhlovou rýchlosťou ω. Nájdite pre teliesko pohybovú rovnicu.

Príklad 2. Pre úlohu „dvojné matematické kyvadlo“ z prednášky dopočítajte poriadne lagranžián

$$L = mR^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_2^2 + mR^2\cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta} + \\ + mgL(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

a

a. nájdite pohybové rovnice,
b. ukážte, že kmitanie ako jedno kyvadlo nie je ich riešením,
c. rovnice linearizujte pre prípad malých uhlov
d. a nájdite módy a vlastné frekviencie malých kmitov.



Zovšeobecnené súradnice

Na domácu úlohu sú dva z nasledujúcich troch príkladov, tretí ako bonus.

Príklad 3. Napíšte pohybové rovnice pre lagranžián v tvare

$$L = x_1\dot{x}_2 + x_2\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1\dot{x}_2 \ .$$

Príklad 4. Majme systém, ktorého lagranžián má tvar

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}}}{c^2}} - V(\vec{x}) \ ,$$

kde $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ je trojrozmený vektor. Nájdite energiu a hybnosť pre tento systém. O aký systém ide? Nájdite pohybové rovnice.

Príklad 5. Teleso hmotnosti M je fixované na vodorovnú priamku, po ktorej sa môže voľne hýbať. Na ňom je na závese dĺžky l zavesené teleso hmostnosti m, ktoré sa môže pohybovať vo zvislej rovine obsahujúcej spomínanú vodorovnú priamku. Vhodne zvolite zovšeobecnené súradnice, zapíšte lagrangián, odvoďte z neho pohybové rovnice a prípadne nájdite zachovávajúce veličiny.

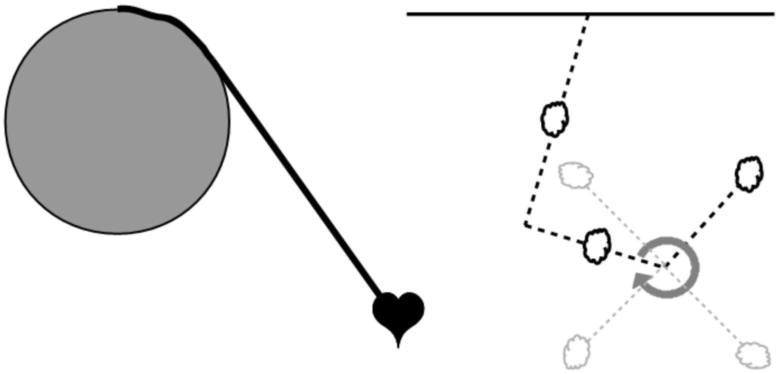
Ďalšie príklady na precvičenie. Tiež je úlohou vhodne zvoliť zovšeobecnené súradnice, zapísať lagrangián, odvodiť z neho pohybové rovnice a prípadne nájsť zachovávajúce veličiny pre opísaný systém.

Príklad 6. Na polvalci hmotnosti M s polomerom R je položené teleso hmotnosti m, teleso sa môže bez trenia po polvalci šmýkať a polvalec sa môže bez trenia šmýkať po podložke.

Príklad 7. V najvyššom bode vodorovného valca polomeru R je upevnené lano dĺžky $l > \pi R/2$, na ktorom je zavesené teleso hmotnosti m, teleso sa môžte pohybovať vo zvislej rovine kolmej na os valca v homogénnom gravitačnom poli.

Návod. Odvinuté lano bude v každom momente priame a v bode dotyku bude dotyčnicou k valcu.

Príklad 8. V stredoch hrán rámu tvaru písmena L sú umiestnené dva hmotné body, rám je zavesený za jeden z vrcholov a v druhom vrchole je nehmotná tyčka, na konci ktorej je tretí hmotný bod a tyčka sa môže okolo bodu úchytu voľne otáčať, všetko sa deje v jednej rovine a v homogénnom gravitačnom poli, hmotnosti telies sú rovnaké, dĺžky všetkého sú zadané.



Obrázok k prikladom 7 a 8.

Príklad 9. Pre úlohu „činka v dvoch rozmeroch“ z prednášky zvoľte nasledujúce zovšeobecnené súradnice q

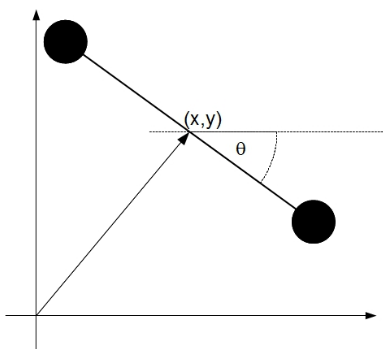
- súradnice stredu činky,
- uhol medzi činkou a x-ovou osou.

a. Pre tieto súradnice q zapíšte vyjadrenie starých súradníc $\bar{x}(q)$.

b. Vyjadrite lagranžián pomocou nových súradníc. Identifikujte zachovávajúce sa veličiny (ak také sú).

c. Nájdite pohybové rovnice pre súradnice q.

d. Činku teraz vložíme do homogénneho gravitačného poľa. Zapíšte lagranžián v tomto prípade a identifikujte prípadne zachovávajúce sa veličiny.



Zovšeobecnené súradnice

A dva zaujímavé príklady na záver.

Príklad 10. Ukážte, že lagranžián

$$L = \frac{1}{12}m^2\dot{x}^4 + m\dot{x}^2V - V^2$$

pre časticu v jednom rozmere a potenciály $V(x)$ vedie na rovnaké pohybové rovnice ako $L = T - V$.

Príklad 11. Ukážte, že lagranžián L a lagranžián

$$\lambda L + \dot{f}$$

kde $\dot{f}$ je úplná časová derivácia nejakej funkcie $f(q^a, t)$, vedú na rovnaké pohybové rovnice.