

# Základy fyziky (2)

## Cvičenie 5

Akékoľvek otázky smelo smerujte na  
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Cvičenie bolo 15.3.2023

---

**Príklad 1** (Prúdenie medzi doskami I). Majme stojacu vodorovnú nekonečnú dosku (a.k.a. dno) a vo výške  $h$  nad ňou rovnakú dosku, ktorá sa hýbe vodorovným smerom rýchlosťou  $u$ . Priestor medzi nimi je vyplnený kvapalinou s viskozitou  $\eta$ .

- V akom tvare očakávate pole rýchlosti tečenia kvapaliny v ustálenom stave?
- Dosaďte riešenie v tvare  $\vec{v} = (v_x(z), 0, 0)$  do NS rovnice a nájdite jej všeobecné riešenie.
- Ako vyzerá okrajová podmienka, ktorá hovorí, že kvapalina sa v miestach dotyku s doskami vzhľadom na dosky nepohybuje?
- S uvážením tejto okrajovej podmienky nájdite výsledné riešenie pre pole rýchlosti tečenia kvapaliny.
- Akou silou (na jednotku dĺžky) je potrebné ťahať hornú dosku?

**Príklad 2** (Prúdenie medzi doskami II). Majme stojacu vodorovnú nekonečnú dosku (a.k.a. dno) a vo výške  $h$  nad ňou rovnakú dosku, ktorá tiež stojí. Priestor medzi nimi je vyplnený kvapalinou s viskozitou  $\eta$  a v smere rovnobežnom s doskami je v ňom konštantný gradient tlaku veľkosti  $k$ .

- Rozmyslite si, že to znamená (ak chceme aby kvapalina tiekla v kladnom smere súradnice  $x$ )  $\vec{\nabla}p = (-k, 0, 0)$ . V akom tvare očakávate pole rýchlosti tečenia kvapaliny v ustálenom stave?
- Dosaďte riešenie v tvare  $\vec{v} = (v_x(z), 0, 0)$  do NS rovnice a nájdite jej všeobecné riešenie.
- Ako vyzerá okrajová podmienka, ktorá hovorí, že kvapalina sa v miestach dotyku s doskami vzhľadom na dosky nepohybuje?
- S uvážením tejto okrajovej podmienky nájdite výsledné riešenie pre pole rýchlosti tečenia kvapaliny.

**Príklad 3** (Prúdenie v rúre). Majme stojacu vodorovnú nekonečnú rúru s polomerom  $R$ . Rúra je vyplnená kvapalinou s viskozitou  $\eta$ . Na rozdiel od prechádzajúceho príkladu ale neočakávajte žiadny konkrétny tvar tlaku okrem toho že (až na hydrostatický tlak závisí iba od súradnice v smere toku kvapaliny).

- Dosaďte riešenie v tvare  $\vec{v} = (v_x(y, z), 0, 0)$  do NS rovnice. Mali by ste sa dostať k rovnici, ktorá má na jednej strane veličiny závisiace iba od  $x$  a na druhej strane iba od  $y, z$ . Rozmyslite si, že ak má rovnica platiť pre ľubovoľné súradnice, musia byť obe tieto strany konštantné.
- Ukážte, že to vedie ku konštantnosti gradientu tlaku a k Laplaceovej rovnici pre  $v_x$ .
- Nájdite výsledné riešenie pre pole rýchlosti tečenia kvapaliny (najlepšie v polárnych súradniciach v rovine  $y, z$ ) a nájdite množstvo vody, ktoré pretečie cez dané miesto rúry za jednotku času.

**Príklad 4** (Prúdenie medzi valcami). Majme dva zvislé valce so spoločnou osou a polomeri  $a, b$ , pričom  $a < b$ . Priestor medzi nimi nech je vyplnený kvapalinou s viskozitou  $\eta$ . Vnútorý valec nech sa otáča uhlovou rýchlosťou  $\omega_a$  a vonkajší uhlovou rýchlosťou  $\omega_b$ .

*Kartézke súradnice*

- a. Po tom, ako si rozmyslíte, že to je dobrý nápad, dosadte do NS rovníc rozdelenie rýchlosti v tvare  $\vec{v} = \omega(r)(-y, x, 0)$ . Rozmyslite si, aý je vzťah medzi

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y} \text{ a } \frac{d\omega}{dr}$$

a rovnice upravte. V niektorých miestach sa oplatí rozmyslieť si, že tlak očakávame ako funkciu iba  $r$ .

- b. Nájdite riešenie pre  $\omega(r)$  a pre tlak.  
c. Nájdite silu pôsobiacu na vrstvu kvapaliny hrúbky  $dr$  vo vzdialenosti  $r$  od osi otáčania.

*Cylindrické súradnice*

- d. Rozmyslite si, že vyššie spomenuté očakávania znamenajú, že pre túto úlohu sú ako stvorené cylindrické súradnice. Na wikipedii nájdite vyjadrenie pôsobenia  $\vec{\nabla}$  na skalárne a vektorové veličiny vyjadrené v cylindrických súradniciach.  
e. Napíšte NS rovnice pre rozdelenie rýchlosti  $\vec{v} = r\omega\hat{\theta}$  a tlaku  $p(r)$  a ukážte, že ide o rovnaké rovnice (s rovnakým riešením) ako predtým.

Na domácu úlohu je tento jeden príklad

**Príklad 5** (Dole vodou). Vrstva vody s viskozitou  $\eta$  hrúbky  $h$  tečie dole naklonenou rovinou so sklonom  $\alpha$ . Bude nás zaujímať rozdelenie rýchlosti v tomto tečení.

- a. Vhodne zvolte súradnice a usúďte, aký tvar bude mať vektor rýchlosti v týchto súradniciach.  
b. Napíšte Navier-Stokesovu rovnicu pre tento prípad a po komponentoch rovnicu vyriešte. Dajte si pozor na to, aké zložky má vo vašich súradniciach vektor  $\vec{g}$ .  
c. Okrajová podmienka na dne je jednoduchá, tu musí platiť  $v = 0$ , na hladine to je trochu komplikovanejšie. Tu musí platiť  $\sigma|_{\text{hladina}} = \text{diag}$ , tj. nediagonálne členy tenzora napätia vypadnú (tj. na hladinu nepôsobí žiadna sila od vrstvy pod ňou). Vypočítajte zložky tenzora  $\sigma$  pre rozdelenie rýchlosti z predchádzajúcej časti a použite túto podmienku pre určenie rozdelenia rýchlosti.  
d. Mali by ste dostať nasledovný výsledok (ktorý je aj návodom pre vhodnú voľbu súradníc) :  
žiadna rýchlosť v smere kolmom na rovinu a v smere dole naklonenou rovinou rýchlosť

$$\frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} y(2h - y).$$