

# Základy fyziky (1)

## Doplnkové Úlohy

Akkoľvek otázky smelo smerujte na  
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Zadané 17.12.2023

---

**Príklad 1.** Vyšetrite pohyb v jednorozmernom potenciály<sup>1</sup>

$$V(x) = V_0 \left[ a \frac{x}{R} + b \frac{x^2}{R^2} \right] e^{-x/R}, \quad a, b > 0.$$

- Nájdite rovnovážne polohy a vyšetrite ich stabilitu.
- Pre stabilné rovnovážne polohy nájdite frekvenciu malých kmitov okolo tejto polohy.
- Kvalitatívne charakterizujte možné pohyby pre rôzne hodnoty počiatočnej polohy  $x_0$  v prípade  $v(0) = 0$ .
- Nakreslite zodpovedajúci fázový portrét.

**Príklad 2.** Na spoločnom závесе visia na špagátoch dĺžky  $L$  dve guľičky hmotnosti  $m$ . Sú elektricky nabité, takže sa odpudzujú silou, ktorá je rovná  $kq^2/r^2$ , kde  $r$  je vzdialenosť guľičiek. Okrem toho je medzi nimi pružina, ktorá má tuhosť  $K$  a v nenatiahnutom stave nulovú dĺžku. A aby toho nebolo málo, celé sa to otáča okolo zvislej osi uhlovou rýchlosťou  $\omega$ .

- a. Aký uhol zvierajú špagáty v rovnovážnej polohe?
- b. Aká je perióda malých kmitov guľičiek okolo tejto rovnovážnej polohy?

**Príklad 3.** Budeme študovať pohyb telesa v gravitačnom poli slnka s potenciálom  $-mk/r$  s malou poruchou  $-A/r^2$ .

- Nájdite silu, ktorá pôsobí na teleso v takomto prípade.
- Napíšte rovnicu, ktorú spĺňa premenná  $u(\theta) = 1/r(\theta)$  a vyriešte ju.
- Z bodu  $r = r_0, \theta = 0$  vypustíme rýchlosťou  $v_0$  teleso v smere kolmom na polohový vektor. Za akých podmienok bude pohyb telesa ohraničený?
- Ukážte, že za takých podmienok sa teleso bude nachádzať opäť vo vzdialenosti  $r_0$  po otočení o uhol

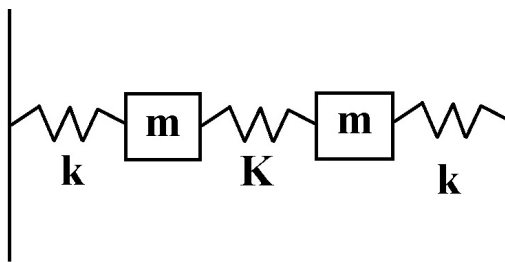
$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{2A}{mv_0^2 r_0^2}}} \quad (1)$$

Interpretujte tento výsledok pre malé  $A$  ako stáčanie orbity.

**Príklad 4.** Majme dve rovnaké telesá hmotnosti  $m$ , spojené pružinkami s rôznou tuhosťou do lineárnej retiazky a na krajoch upevnené na fixovanú stenu.

---

<sup>1</sup>Ako cvičenie tiež určite rozmer všetkých vystupujúcich konštánt.



- Napíšte pohybové rovnice pre výchylku z rovnovážnej polohy každého telesa.
- Napíšte tieto rovnice v maticovom tvare a nájdite frekvencie jednotlivých módov. Nájdite zodpovedajúce vlastné vektory a stručne opíšte pohyb, ktorý telesá vykonávajú v tom ktorom móde.
- Ukážte, že v módoch, v ktorých sa mení poloha ťažiska platí rovnica

$$\text{súčet hmotností} \times \text{zrýchlenie ťažiska} = \text{súčet vonkajších síl}. \quad (2)$$

### Príklad 5.

- a. Ukážte si, že pre dosku tvaru štvorca s hranou  $a$  je moment zotrvačnosti vzhľadom na os kolmú na dosku a prechádzajúcu stredom daný vzťahom

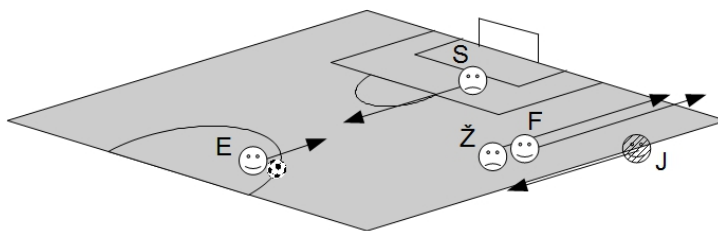
$$I = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \frac{m}{a^2} (x^2 + y^2) . \quad (3)$$

Vypočítajte tento integrál.

- b. Dosku zavesíme za jeden z vrcholov a necháme kmitať vo zvislej rovine dosky. Aká bude perióda tohto pohybu?

**Príklad 6.** Po ťažkom boji v galaktickej kvalifikácii sa futbalista Emanuel sa so svojim tímom prebojoval do Intergalaktického finále.

- a. **Relativistický ofsajd.** V zápase nastala nasledovná sporná situácia. Emanuel mal loptu v strede poľa a postupoval s ňou smerom k súperovej bráne. Jeho spoluhráč, hrotový útočník Fabio, si nabiehal na prihrávku za obranu. V päťkách mu je obranca Žiarislav. Stopér Svätoslav videl Emanuelov úmysel nahráť Fabiovi a chcel ich chytiť do ofsajdovej pasce, preto sa rozbehol smerom preč od brány. Čiarový rozhodca John sa pohyboval spoločne s posledným obrancom (pozri obrázok).



A stalo sa toto. Emanuel poslal na Fabia dokonale načasovanú prihrávku a teda prihral presne v momente, keď bol (v Emanuelovej sústave) Edgar vo svojom nábehu na úrovni Svätoslava.

- Videli diváci na štadióne ofsajd<sup>2</sup>?
- Aký bol verdikt rozhodcu?
- Bol obranca Žiarislav spokojný s týmto rozhodnutím?

<sup>2</sup>Ofsajd nastane vtedy, ak v momente prihrávky nie je medzi útočiacim hráčom a brámkou žiadny obranca.