Základy fyziky (1) - Cvičenie 3

Cvičenie bolo 12.10.2023

Akékoľvek otázky smelo smerujte na
`juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

Príklad 1. Vypočítajte, akú časť periódy strávi harmonicky oscilujúce teleso viac ako polovicu amplitúdy od rovnovážnej polohy.

Príklad 2 (■). Ukážte, že pre zadanú hodnotu energie E je trajektóriou harmonického oscilátora vo fázovom portréte elipsa.

Príklad 3 (■). Ako sa bude pohybovať harmonický oscilátor, na ktorý pôsobím konštantná sila? Pre jednoznačnosť nech je to gravitačná sila $-mg$.

Príklad 4. Majme nehmotnú pružinu tuhosti k, ktorá má pokojovú dĺžku L. Jeden jej koniec je pevne fixovaný a na druhý upevníme hmotný bod hmotnosti m a voľne pustíme. Aká bude perióda a amplitúda kmitov telesa po uvoľnení?

Príklad 5 (■). Vypočítajte periódu kmitov harmonického oscilátora priamo zo zákona zachovania energie. Na to si rozmyslite, že vzťah pre periódu je

$$T = 4\int_0^{x_0} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(V(x_0) - V(x)\right)}} \ , \ V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \ ,$$

a integrál vypočítajte.

Príklad 6. Rozmyslite si, že matematické kyvadlo je dané potenciálom

$$V(x) = mgl\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\right) \ .$$

Nájdite periódu jeho malých kmitov.

Príklad 7 (■). Majme harmonický oscilátor, na ktorý pôsobí odporová sila úmerná rýchlosti a budiaca sila tvaru $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$. To znamená, že pohybová rovnica má tvar

$$m\ddot{x} = -\kappa\dot{x} - m\omega^2 x + F_0 e^{i\omega t} \ .$$

Nájdite všeobecné riešenie pre pohyb oscilátora.

Na domácu úlohu si vyberte dva z nasledujúcich troch príkladov a spočítajte ich. Tretí je potom šanca na bonus.

Príklad 8. Vyjadrite konštanty v riešení pohybových rovníc pre harmonický oscilátor

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \tag{1}$$

pomocou počiatočnej polohy a počiatočnej rýchlosti x_0, v_0. Napíšte toto riešenie v tvare

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \tag{2}$$

a nájdite vyjadrenie pre A, B cez x_0, v_0. Vyjadrite riešenie v tvare

$$x(t) = X_0 \sin(\omega t + \phi_0) \tag{3}$$

a nájdite vyjadrenie pre X_0, ϕ_0 cez x_0, v_0.

Ukážte, že pre reálne počiatočné podmienky je riešenie (1) vždy reálne.

Príklad 9. Vypočítajte časovú závislosť kinetickej a potenciálne energie harmonického oscilátora a ukážte, že sa celková energia zachováva.

Ako ťažšiu verziu tohto príkladu môžete urobiť to isté pre tlmený harmonický oscilátor a spočítať, koľko energie oscilátoru za jednu periódu ubudne.

Príklad 10. Ak považujeme matematické kyvadlo za harmonický oscilátor, priblíženie $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ platí len pre malé výchylky x. Ak je x_0 maximálna výchylka v x-ovom smere, bezrozmerný parameter úlohy je $\xi = x_0/l$ a perióda kmitov má tvar

$$T = f(\xi)\sqrt{\frac{l}{g}}\ .$$

Vieme, že konštantný člen v rozvoji $f(\xi)$ je 2π. Zo vzťahu

$$T = 4\int_0^{x_0} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(V(x_0) - V(x)\right)}}$$

s príslušným $V(x)$ pre matematické kyvadlo nájdite ďalší netriviálny člen tohto rozvoja.