Základy fyziky (1)
Cvičenie 4

Akékoľvek otázky smelo smerujte na
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Cvičenie bolo 19.10.2023

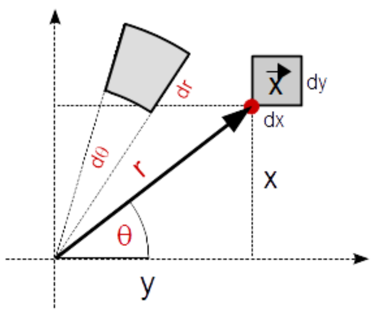
Príklad 1 (■). Napíšte pohybovú rovnicu pre lineárny harmonický oscilátor v dvoch rozmeroch s potenciálom

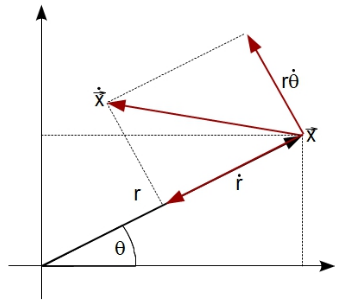
$$V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2$$

a vyriešte ju. Ukážte, že v prípade $\omega_x = \omega_y$ ide o pohyb po elipse a rozmyslite si, že vo všeobecnom prípade ide o komplikovaný pohyb.

Príklad 2 (■). Majme silové pole ako na prednáške $\vec{F} = (-y, x, 0)$. Skúste nájsť pre toto pole potenciál integrovaním a zistite, kde je problém. Vypočítajte pre toto pole $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ a ukážte, že nie je potenciálové. V rovine xy zvoľte ako krivku kružnicu s polomerom R a stredom v počiatku a overte pre ňu platnosť Stokesovej vety.

Príklad 3 (■). Ukážte, že z vyjadrenia x, y v polárnych súradniciach





$$x = r\cos\theta\ ,\ \ y = r\sin\theta$$

dostaneme vzťah pre rýchlosť

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}\ .$$

a pre zrýchlenie

$$\ddot{\vec{x}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}\ .$$

Príklad 4 (■). Ukážte, že pre centrálny potenciál sa veličina $\vec{L} = m\,\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$ zachováva. Nájdite tento vetkor a jeho veľkosť v polárnych súradniciach.

Príklad 5. Nájdite množinu všetkých bodov v priestore, ktoré vieme trafiť kameňom, ktorý hádžeme v homogénnom gravitačnom polu zo zadaného miesta fixovanou veľkosťou rýchlosti v_0.

Príklad 6. Z povrchu zeme hádžeme v homogénnom gravitačnom poli kameň. Vieme ho hodiť rýchlosťou veľkosti v_0. Bez odporu vzduchu dohodíme najďalej ak hádžeme pod uhlom 45°. V prípade lineárneho odporu $\vec{F} = -\kappa\vec{v}$ je tento uhol komplikovane závislý na v_0, ale môžete skúsiť dokázať nasledujúce tvrdenie. Ak uhol, pri ktorom doletí kameň najďalej označíme α a uhol, pri ktorom v takom prípade dopadne označíme β, potom platí $\alpha + \beta = 90°$.

Z nasledujúcich príkladov si vyberte dva. Ostatné sú potom šanca získať bonusové body.

Príklad 7. Teleso vrhneme rýchlosťou v_0 šikmo pod uhlom α a teda $\vec{x}(0) = (0,0,0), \vec{v}(0) = (v\cos\alpha, v\sin\alpha, 0)$. Teleso sa bude pohybovať v gravitačnom poli $\vec{F} = (0, -mg, 0)$.

a. Zapíšte a vyriešte pohybové rovnice v tomto prípade. Vyjadrite dráhu telesa ako $y(x)$ a ukážte, že ide o parabolu.

b. Za aký čas teleso dopadne? Ako ďaleko dopadne? Do akej maximálnej výšky sa teleso dostane? Pre aké hodnoty uhla α sú tieto výsledky najväčšie?

c. Teleso hádžeme rovnako ako predtým, ale pred nami sa nachádza kopec so sklonom $\beta < \alpha$. Do akej vzdialenosti hore kopcom teleso doletí?

d. Ako najďalej pozdĺž kopca vieme teleso vyhodiť?

Príklad 8. Majme harmonicky oscilujúce teleso, ktorého vlastná frekvencia je $\omega_0 = 3\omega$, pôsobí na neho odporová sila $-\kappa v$ a budiaca sila tvaru

$$F(t) = \cos\omega t + \frac{1}{2}\cos 3\omega t\ .$$

a. Napíšte túto silu ako superpozíciu členov tvaru $F_\omega e^{i\omega t}$

b. Nájdite úplne riešenie pohybovej rovnice v stuácii, keď v čase $t = 0$ teleso s nulovou rýchlosťou pustíme z miesta x_0.

c. Ako bude toto riešenie vyzerať po veľmi dlhom čase?

Príklad 9. Rozmyslite si, že pre gravitačnú silu

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}\ ,$$

platí v polárnych súradniciach roviny, v ktorej sa teleso pohybuje, pre moment hybnosti

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

a pre energiu

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r}\ .$$