

# Základy fyziky (1)

## Cvičenie 6

Akékoľvek otázky smelo smerujte na  
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Cvičenie bolo 26.10.2023

---

**Príklad 1** (■ Obľúbený triviálny problém I). Študujte pohyb voľného telesa ako problém s centrálnym potenciálom  $V(r) = 0$ .

**Príklad 2** (■ Obľúbený netriviálny problém I). Študujte pohyb 3D harmonického oscilátora ako problém s centrálnym potenciálom

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega_0 r^2 .$$

**Príklad 3** (HW). V tomto príklade bude úlohou dopočítať niekoľko vecí, ktoré sa použili na prednáške.

a. Z vyjadrenia

$$r(\theta) = \frac{L^2/(GMm^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (1)$$

nájdite vzťah pre  $\dot{r}$ . Nezabudnite, že viete  $\dot{\theta} = L/mr^2$ . Ukážte, že pre  $\theta = 0$  dostaneme  $\dot{r} = 0$ . To sa dalo očakávať, keďže sme na prednáške zistili že toto je miesto, v ktorom sa teleso nachádza najbližšie k stredu.

Dosaďte  $r$  pre  $\theta = 0$  do vzťahu pre celkovú energiu (alebo do vzťahu pre efektívny potenciál) a ukážte, že pre energiu telesa platí

$$E = \frac{(GM)^2 m^3}{2L^2} (\varepsilon^2 - 1) . \quad (2)$$

b. Ukážte, že z vyjadrenia pre kartézke súradnice  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  dostaneme

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad (3)$$

Nájdite hodnoty parametrov  $x_0, a, b$ .

c. Ukážte, že pre hlavnú polos elipsy  $a$  platí

$$a = -\frac{GMm}{2E} . \quad (4)$$

**Príklad 4** (HW). Družica sa pohybuje po kruhovej dráhe okolo planéty hmotnosti  $M$  vo vzdialenosti  $H$  od jej stredu.

a. Aký čas trvá družici jeden obeh okolo planéty?

b. Zistíte, v akej v akej výške nad Zemou je tento čas rovný jednému dňu. Premyslite si, že to znamená že družica bude stále nad tým istým miestom na Zemi.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Číselné hodnoty gravitačnej konštanty a hmotnosti zeme rada prezradí Wikipedia.

**Príklad 5 (■).** Máme planétu polomeru  $R$ , na povrchu ktorej je teleso hmotnosti  $m$ . Akú rýchlosť mu máme udeliť, aby opustilo gravitačné pôsobenie planéty. Preštudujte závislosť tejto rýchlosti od jej smeru vzhľadom na povrch planéty. Čo keď teleso neštartuje z povrchu ale z výšky  $H$  nad planétou?

**Príklad 6 (■).** Máme planétu polomeru  $R$ , na povrchu ktorej je teleso hmotnosti  $m$ . Akú rýchlosť mu máme udeliť v smere rovnobežnom s povrchom planéty, aby obiehalo kolo planéty po kružnici? Čo ak sme vo výške  $H$  nad planétou.

**Príklad 7 (■).** Ako vyzerá pohyb telesa, ktoré sme vypustili rýchlosťou väčšou alebo menšou ako prvou kozmickou?

**Príklad 8 (HW).** Do akej výšky vyletí teleso, ak ho z povrchu planéty vyhodíme prvou kozmickou rýchlosťou? Ako sa zmení odpoveď na túto otázku, ak sa planéta otáča?

**Príklad 9 (Stabilita kruhových orbít).** Majme potenciál v tvare  $V(r) = -km/r^n$ .

- Napíšte vzťah pre efektívny potenciál a nájdite podmienku pre jeho extrém.
- Vypočítajte druhú deriváciu efektívneho potenciálu v tomto bode a zistite, za akých podmienok je tento extrém minimom. Interpretujte tento výsledok ako podmienku pre stabilitu kruhovej orbity.

**Príklad 10 (Obľúbený triviálny problém II).** Študujte pohyb voľného telesa tou istou technikou, ako sme použili na výpočet Keplerovho problému, t.j. prechodom k  $u = 1/r$ .

**Príklad 11 (Obľúbený netriviálny problém II).** Prechodom k premennej  $u = 1/r$  preštudujte pohyb lineárneho harmonického oscilátora.

**Príklad 12 (HW).** Ukážte, že v potenciály  $V(r) = -mk/r$  je nasledujúci vektor konštantný.

$$\vec{R} = \frac{1}{mk} \dot{\vec{x}} \times \vec{L} - \frac{\vec{x}}{r}.$$

Tomuto vektoru sa hovorí Laplace-Runge-Lenz vektor a je špeciálnou zachovávajúcou sa veličinou pre  $1/r$  potenciál. Premyslite si, kam smeruje tento vektor.

---

Na domácu úlohy vypočítajte dva z príkladov označených HW, zvyšné potom ako bonus.