Základy fyziky (1)
Cvičenie 7

Akékoľvek otázky smelo smerujte na
`juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

Cvičenie bolo 8.11.2023

Príklad 1 (■ Dvojhviezda)**.** Majme dve rovnako veľké hviezdy hmotnosti m, ktoré okolo seba obiehajú po kružnici rýchlosťou v.

- Kde je ťažisko tejto sústavy?
- Ako vyzerá táto úloha z pohľadu Newtonovho zákona pre jednu planétu? Aký je polomer kružnice, po ktorej planéty obiehajú?
- Aká je redukovaná hmotnosť sústavy? Aký je jej celkový moment hybnosti a celková energia?
- Napíšte zodpovedajúcu pohybovú rovnicu pre fiktívne teleso z prednášky a vyriešte ju. Z toho nájdite polohové vektory každej z planét a overte, že dostanete rovnaký polomer kružnice po ktorej obiehajú, ako z Newtonovho zákona.

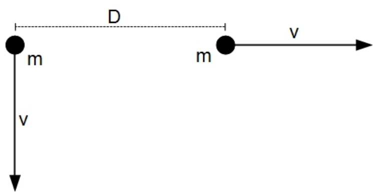
Príklad 2 (Dvojhviezda reloaded)**.** Majme dve rovnako veľké hviezdy hmotnosti m, ktoré na začiatku nachádzajú vo vzdialenosti $2R$ a majú rovnakú rýchlosť v kolmú na ich spojnicu. Táto rýchlosť je ale menšia ako rýchlosť potrebná na pohyb po tej istej kružnici (úloha z cvičenia).

- Aký je jej celkový moment hybnosti a celková energia?
- Ako vyzerá potenciál, v ktorom sa pohybuje fiktívne teleso, ktorého pohyb popisuje pohyb dvoch hviezd? Aké konštanta k v potenciály v termínoch redukovanej hmotnosti μ? Ako vyzerá celková energia a celkový moment hybnosti termínoch k a μ?
- Nájdite pohyb fiktívneho telesa a z neho pohyby oboch hviezd.

Príklad 3 (HW. Zem a Mesiac)**.** Majme dve telesá hmotnosti M a m, ktoré sa od seba nachádzajú vo vzdialenosti D. Aké rýchlosti musia mať, aby sa pohybovali po kružniciach? Aké budú polomery týchto kružníc?

Na úlohu sa dá pozrieť bez ťažkej mašinérie centrálnych potenciálov len cez Newtonovu pohybovú rovnicu. Alebo aj s ním. Urobte oboje.

Príklad 4 (■)**.** Majme dve telesá hmotnosti m. Jednému telesu udelíme rýchlosť v kolmo na ich spojnicu, druhému udelíme rýchlosť v v smere priamo preč od prvého telesa.



Telesá sa priťahujú podľa Newtonovho gravitačného zákona, inak na ne nič nepôsobí.

a. Nájdite rýchlosť ťažiska tejto sústavy. Nájdite rýchlosti telies v ťažiskovej sústave. Aká je redukovaná hmotnosť μ pre tento systém?

b. Nájdite celkovú energiu a celkový moment hybnosti sústavy v ťažiskovej sústave.

c. Akú podmienku musí spĺňať v, aby sa telesá nevzdialili do nekonečna ale obiehali po elispe okolo spoločného ťažiska?

d. Z vyjadrenia E a L nájdite parametre dráhy a, ε virtuálneho telesa, ktorého pohyb určuje pohyb týchto dvoch telies.

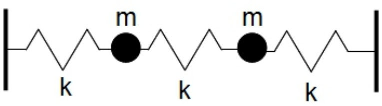
e. Nájdite minimálnu a maximálnu vzdialenosť, do ktorej sa od seba telesá dostanú.

f. Explicitne nájdite vyjadrenie pre $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ v pôvodnej sústave.

Príklad 5. Ako najbližšie k Slnku sa dostane kométa, ktorá má v najvzdialenejšom bode svojej trajektórie rýchlosť v a je vtedy vo vzdialenosti D od Slnka.

Príklad 6. Máme dve telesá hmotnosti m, ktoré sú veľmi ďaleko od seba a majú rýchlosť v a smer oproti sebe. Ak by medzi nimi nebolo žiadna interakcia, prešli by okolo sebe v najmenšej vzdialenosti b. Ako najbližšie sa k sebe dostanú, ak sa navzájom gravitačne priťahujú? Ako sa zmení smer ich rýchlostí, keď sa po vzájomnom priblížení od seba dostatočne vzdialia?

Príklad 7 (■). Rozmyslite si, že problém dvoch telies na troch pružinkách vyzerá v reči matíc nasledovne



$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory tejto matice a napíšte všeobecné riešenie pre pohyb tejto sústavy.

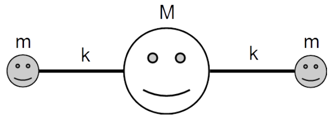
Príklad 8 (■). V situácií z predchádzajúceho príkladu, tj. pre dve telesá na troch pružinách, nájdite explicitne riešenie pre počiatočné podmienky

$$x_1(0) = -x_0 \ , \ x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \ .$$

Príklad 9 (■). Nájdite pohyb ťažiska sústavy z prechádzajúceho príkladu v oboch módoch pohybu. Rozmyslite si, že v oboch prípadoch platí

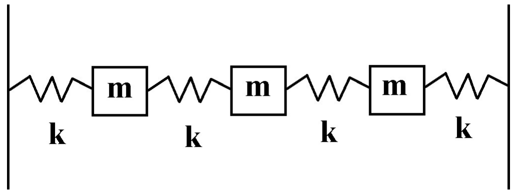
$$\begin{aligned} &\text{súčet hmotností} \ \times \ \text{zrýchlenie ťažiska} \\ &\qquad = \ \text{súčet (vonkajších) síl} \ . \end{aligned}$$

Príklad 10. Urobte podobnú analýzu pohybu ako v prechádzajúich troch príkladoch pre sústavu na obrázku.



Ide o model trojatómovej molekuly.

Príklad 11 (HW). Majme tri rovnaké telesá hmotnosti m, spojené pružinkami s rovnakou tuhosťou do lineárnej retiazky a na krajoch upevnené na fixovanú stenu.



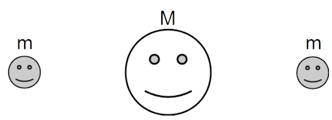
- Napíšte pohybové rovnice pre výchylku z rovnovážnej polohy každého telesa.
- Napíšte tieto rovnice v maticovom tvare a nájdite frekvencie jednotlivých módov. Nájdite zodpovedajúce vlastné vektory a stručne opíšte pohyb, ktorý telesá vykonávajú v tom ktorom móde.
- Ukážte, že v módoch, v ktorých sa mení poloha ťažiska platí rovnica

$$\begin{aligned} &\text{súčet hmotností} \ \times \ \text{zrýchlenie ťažiska} \\ &\qquad = \ \text{súčet (vonkajších) síl} \ . \end{aligned}$$

Príklad 12. Interakcia dvoch skutočných neutrálnych atómov alebo molekúl je veľmi dobre popísaná Lennard-Jonesovim potenciálaom

$$U(r) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6} \right] .$$

- Rozmyslite si o akú interakciu ide.
- Nájdite rovnovážnu vzdialenosť častíc a efektívnu pružinovú konštantu k, ktorá popisuje malé výchylky z tejto polohy.
- Majme molekulu ako na nasledujúcom obrázku.



  Interakcia molekúl m je daná jednou sadou parametrov v LJ potenciály a interakcia molekúl m a M druhou sadou. Nájdite rovnovážnu konfiguráciu tejto sústavy a možné frekvencie malých kmitov okolo tejto polohy.
- Nájdite aj zodpovedajúce módy pohybu molekúl a rozmyslite si, ako vyzerajú.