

# Základy fyziky (1) - Cvičenie 9

Akékoľvek otázky smelo smerujte na  
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Cvičenie bolo 23.11.2023

$$I_{ab} = \sum m_i [(\vec{x}_i \cdot \vec{x}_i) \delta_{ab} - \vec{x}_{ia} \vec{x}_{ib}]$$

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

$$\omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

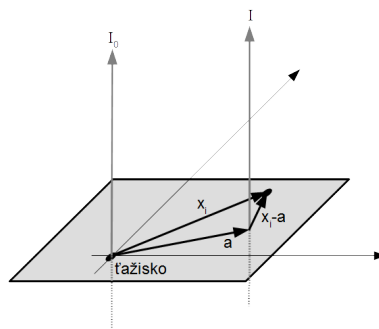
$$I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) = M_1$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) = M_2$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) = M_3$$

**Príklad 1** (Steinerova veta). Majme teleso, ktoré má okolo osi prechádzajúcej ťažiskom moment zotrvačnosti  $I_0$ . Ukáže, že okolo novej osi, ktorá je s touto pôvodnou rovnobežná a nachádza sa vo vzdialenosti  $a$ , má moment zotrvačnosti

$$I = I_0 + ma^2 .$$



**Príklad 2.** Nájdite pohybovú rovnicu matematického kyvadla, t.j. jedného hmotného bodu na závese dĺžky  $l$  v homogénnom gravitačnom poli.

**Príklad 3** (Fyzikálne kyvadlo). Paličku zavesíme za jeden koniec a necháme kmitať v homogénnom gravitačnom poli. S akou periódou to bude? Ako to vyzerá pre všeobecné teleso, ktoré je zavesené za bod mimo jeho ťažiska?

**Príklad 4.** Valec položíme na naklonenú rovinu a necháme ho bez prešmykovania kotúľať nadol. Aké bude jeho zrýchlenie?

**Príklad 5.** Rolku toaletného papiera chytíme za koniec a uvoľníme. S akým zrýchlením sa bude pohybovať tesne po uvoľnení?

**Príklad 6.** Nájdite maticu momentu zotrvačnosti pre homogénnu paličku z úlohy o fyzikálnom kyvadle a pre homogénny disk polomeru  $R$  a hmotnosti  $M$ .

**Príklad 7** (Precesia symetrického zotrvačníka). Majme teleso, ktorého moment zotrvačnosti je  $I = \text{diag}(I_1, I_1, I_3)$ . Preštudujte jeho pohyb v situácii s nulovým pôsobiacim momentom sily. Ako vyzerá jeho pohyb v termínoch Eulerových uhlov?

**Príklad 8** (Tennis racket theorem). Majme všeobecné teleso s  $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ . Overte, že  $\vec{\omega} = (\omega_0, 0, 0)$  je riešenie Eulerových dynamických rovníc s nulovým momentom sily. Preštudujte stabilitu tohto riešenia voči malým poruchám, t.j. ako sa správa pre riešenia tvaru  $\vec{\omega} = (\omega_0 + \delta_1, \delta_2, \delta_3)$  pre  $\delta_i \ll \omega_0$ .

**Príklad 9** (Bicyklové koleso kvalitatívne). Vyberte z rámu bicyklové koleso a zvislej polohe ho roztočte. Potom pustite jeden koniec osky kolesa a držte ho iba za ten druhý. Pokúste sa z rovnice  $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$  vysvetliť jeho následný pohyb.

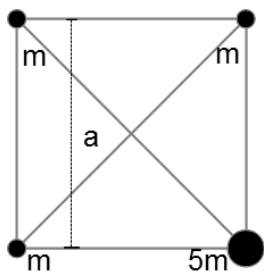
Vyberte si jeden z príkladov a vyriešte ho. Druhý potom ako bonus.

**Príklad 10.** Máme štvorcový rám s hranou dĺžky  $a$ , ktorý má vo svojich troch vrcholoch hmotné body s hmotnosťou  $m$  a vo štvrtom hmotný bod s hmotnosťou  $5m$ .

- Nájdite ťažisko tejto sústavy.
- Nájdite moment zotrvačnosti tejto sústavy vzhľadom na stred štvorcového rámu.
- Nájdite moment zotrvačnosti tejto sústavy vzhľadom na ťažisko.
- Overte Steinerovu vetu.

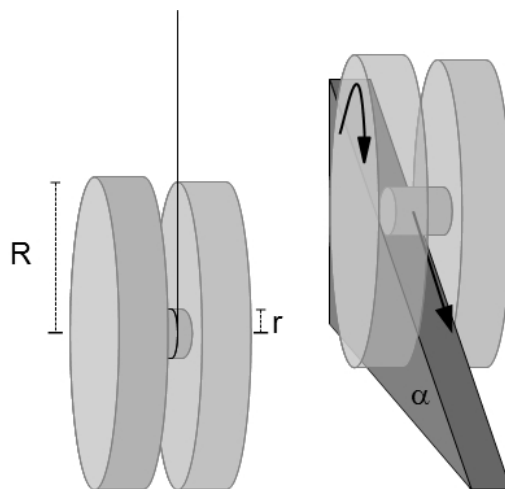
Rám aj s hmotnými bodmi teraz upevníme na os kolmú na rovinu štvorca a prechádzajúcu jeho stredom.

- Nájdite rovnovážnu polohu sústavy.
- Nájdite periódu kmitov tejto sústavy.



**Príklad 11.** Jojo vznikne spojením dvoch diskov polomeru  $R$  a hmotnosti  $M$ , medzi ktoré vložíme disk polomeru  $r < R$  a hmotnosti  $m$ .

- Vypočítajte moment zotrvačnosti disku okolo osi, ktorá prechádza jeho stredom a je kolmá na jeho rovinu.<sup>1</sup>
- Okolo malého disku omotáme motúz, za ktorý jojo zavesíme a uvoľníme. Ak moment zotrvačnosti valca s polomerom  $\rho$  a hmotnosťou  $\mu$  je  $\mu\rho^2/2$ , aké bude zrýchlenie joja hneď po uvoľnení?
- Jojo potom položíme na naklonenú rovinu so sklonom  $\alpha$  a necháme ho kotúľať sa smerom nadol. S akým zrýchlením sa bude pohybovať?<sup>2</sup>



<sup>1</sup>Rozmyslite si, že je potrebné spočítať integrál

$$I = \frac{m}{R^2} \int_0^R dr r r^2 .$$

<sup>2</sup>Na výpočet tohto príkladu pomôže pozrieť sa na príklad o valci na naklonenej rovine, ktorý je vypočítaný v poznámkach.