Základy fyziky (2)
Cvičenie 5

Akékoľvek otázky smelo smerujte na
`juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

Cvičenie bolo 26. 4. 2024

Príklad 1 (Prúdenie medzi doskami I)**.** Majme stojacu vodorovnú nekonečnú dosku (a.k.a. dno) a vo výške h nad ňou rovnakú dosku, ktorá sa hýbe vodorovným smerom rýchlosťou u. Priestor medzi nimi je vyplnený kvapalinou s viskozitou η.

a. V akom tvare očakávate pole rýchlosti tečenia kvapaliny v ustálenom stave?

b. Dosaďte riešenie v tvare $\vec{v} = (v_x(z), 0, 0)$ do NS rovnice a nájdite jej všeobecné riešenie.

c. Ako vyzerá okrajová podmienka, ktorá hovorí, že kvapalina sa v miestach dotyku s doskami vzhľadom na dosky nepohybuje?

d. S uvážením tejto okrajovej podmienky nájdite výsledné riešenie pre pole rýchlosti tečenia kvapaliny.

e. Akou silou (na jednotku dĺžky) je potrebné ťahať hornú dosku?

Príklad 2 (Prúdenie medzi doskami II)**.** Majme stojacu vodorovnú nekonečnú dosku (a.k.a. dno) a vo výške h nad ňou rovnakú dosku, ktorá tiež stojí. Priestor medzi nimi je vyplnený kvapalinou s viskozitou η a v smere rovnobežnom s doskami je v ňom konštantný gradient tlaku veľkosti k.

a. Rozmyslite si, že to znamená (ak chceme aby kvapalina tiekla v kladnom smere súradnice x) $\vec{\nabla} p = (-k, 0, 0)$. V akom tvare očakávate pole rýchlosti tečenia kvapaliny v ustálenom stave?

b. Dosadte riešenie v tvare $\vec{=}(v_x(z), 0, 0)$ do NS rovnice a nájdite jej všeobecné riešenie.

c. Ako vyzerá okrajová podmienka, ktorá hovorí, že kvapalina sa v miestach dotyku s doskami vzhľadom na dosky nepohybuje?

d. S uvážením tejto okrajovej podmienky nájdite výsledné riešenie pre pole rýchlosti tečenia kvapaliny.

Príklad 3 (Prúdenie v rúre)**.** Majme stojacu vodorovnú nekonečnú rúru s polomerom R. Rúra je vyplnená kvapalinou s viskozitou η. Na rozdiel od prechádzajúceho príkladu ale neočakávajte žiadny konkrétny tvar tlaku okrem toho že (až na hydrostatický0 tlak závisí iba od súradnice v smere toku kvapaliny.

a. Dosaďte riešenie v tvare $\vec{v} = (v_x(y, z), 0, 0)$ do NS rovnice. Mali by ste sa dostať k rovnici, ktorá má na jednej strane veličiny závisiace iba od x a na druhej strane iba od y, z. Rozmyslite si, že ak má rovnica platiť pre ľubovoľné súradnice, musia byť obe tieto strany konštantné.

b. Ukážte, že to vedie ku konštantnosti gradientu tlaku a k Laplaceovej rovnici pre v_x.

c. Nájdite výsledné riešenie pre pole rýchlosti tečenia kvapaliny (najlepšie v polárnych súradniciach v rovine y, z) a nájdite množstvo vody, ktoré pretečie cez dané miesto rúry za jednotku času.

Príklad 4 (Prúdenie medzi valcami)**.** Majme dva zvislé valce so spoločnou osou a polomermi a, b, pričom $a < b$. Priestor medzi nimi nech je vyplnený kvapalinou s viskozitou η. Vnútorný valec nech sa otáča uhlovou rýchlosťou ω_a a vonkajší uhlovou rýchlosťou ω_b.

Kartézke súradnice

a. Po tom, ako si rozmyslíte, že to je dobrý nápad, dosaďte do NS rovníc rozdelenie rýchlosti v tvare $\vec{v} = \omega(r)(-y, x, 0)$. Rozmyslite si, aý je vzťah medzi

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y} \text{ a } \frac{d\omega}{dr}$$

a rovnice upravte. V niektorých miestach sa oplatí rozmyslieť si, že tlak očakávame ako funckiu iba r.

b. Nájdite riešenie pre $\omega(r)$ a pre tlak.

c. Nádjite silu pôsobiacu na vrstvu kvapaliny hrúbky dr vo vzdialenosti r od osi otáčania.

Cylindrické súradnice

d. Rozmyslite si, že vyššie spomenuté očakávania znamenajú, že pre túto úlohu sú ako stvorené cylindrické súradnice. Na wikipedií nájdite vyjadrenie pôsobenia $\vec{\nabla}$ na skalárne a vektorové veličiny vyjadrené v cylindrických súradniciach.

e. Napíšte NS rovnice pre rozdelenie rýchlosti $\vec{v} = r\omega\hat{\theta}$ a tlaku $p(r)$ a ukážte, že ide o rovnaké rovnice (s rovnakým riešením) ako predtým.

Na domácu úlohu je tento jeden príklad

Príklad 5 (Dole vodou)**.** Vrstva vody s viskozitou η hrúbky h tečie dole naklonenou rovinou so sklonom α. Bude nás zaujímať rozdelenie rýchlosti v tomto tečení.

a. Vhodne zvoľte súradnice a usúďte, aký tvar bude mať vektor rýchlosti v týchto súradniciach.

b. Napíšte Navier-Stokesovu rovnicu pre tento prípad a po komponentoch rovnicu vyriešte. Dajte si pozor na to, aké zložky má vo vašich súradniciach vektor $\vec{g}$.

c. Okrajová podmienka na dne je jednoduchá, tu musí platiť $v = 0$, na hladine to je trochu komplikovanejšie. Tu musí platiť $\sigma|_{\text{hladina}} = diag$, tj. nediagonálne členy tenzora napätia vypadnú (tj. na hladinu nepôsobí žiadna sila od vrstvy pod ňou). Vypočítajte zložky tenzora σ pre rozdelenie rýchlosti z predchádzajúcej časti a použite túto podmienku pre určenie rozdelenia rýchlosti.

d. Mali by ste dostať nasledovný výsledok (ktorý je aj návodom pre vhodnú voľbu súradníc) :

žiadna rýchlosť v smere kolmom na rovinu a v smere dole naklonenou rovinou rýchlosť

$$\frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta} y(2h - y).$$