

Základy fyziky (1)

Cvičenie 4

Akékoľvek otázky smelo smerujte na
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Cvičenie bolo 16. 10. 2024

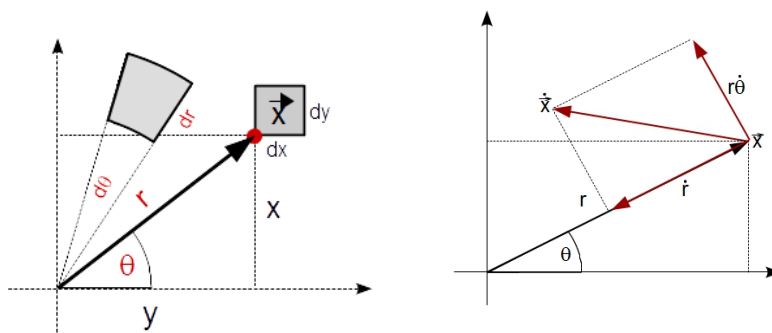
Príklad 1 (■). Napíšte pohybovú rovnicu pre lineárny harmonický oscilátor v dvoch rozmeroch s potenciálom

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega_x^2x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2y^2$$

a vyriešte ju. Ukážte, že v prípade $\omega_x = \omega_y$ ide o pohyb po elipse a rozmyslite si, že vo všeobecnom prípade ide o komplikovaný pohyb.

Príklad 2 (■). Majme silové pole ako na prednáške $\vec{F} = (-y, x, 0)$. Skúste nájsť pre toto pole potenciál integrovaním a zistíte, kde je problém. Vypočítajte pre toto pole $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ a ukážte, že nie je potenciálové. V rovine xy zvolte ako krivku kružnicu s polomerom R a stredom v počiatku a overte pre ňu platnosť Stokesovej vety.

Príklad 3 (■). Ukážte, že z vyjadrenia x, y v polárnych súradniciach



$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

dostaneme vzťah pre rýchlosť

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}.$$

a pre zrýchlenie

$$\ddot{\vec{x}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}.$$

Príklad 4 (■). Ukážte, že pre centrálny potenciál sa veličina $\vec{L} = m \vec{x} \times \dot{\vec{x}}$ zachováva. Nájdite tento vektor a jeho veľkosť v polárnych súradniciach.

Príklad 5. Nájdite množinu všetkých bodov v priestore, ktoré vieme trafiť kameňom, ktorý hádzeme v homogénnom gravitačnom poli zo zadaného miesta fixovanou veľkosťou rýchlosti v_0 .

Príklad 6. Z povrchu zeme hádzeme v homogénnom gravitačnom poli kameň. Vieme ho hodiť rýchlosťou veľkosti v_0 . Bez odporu vzduchu dohodíme najďalej ak hádzeme pod uhlom 45° . V prípade lineárneho odporu $\vec{F} = -\kappa\vec{v}$ je tento uhol komplikovane závislý na v_0 , ale môžete skúsiť dokázať nasledujúce tvrdenie. Ak uhol, pri ktorom doletí kameň najďalej označíme α a uhol, pri ktorom v takom prípade dopadne označíme β , potom platí $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Z nasledujúcich príkladov si vyberte dva. Ostatné sú potom šanca získať bonusové body.

Príklad 7. Teleso vrhneme rýchlosťou v_0 šikmo pod uhlom α a teda $\vec{x}(0) = (0, 0, 0)$, $\vec{v}(0) = (v \cos \alpha, v \sin \alpha, 0)$. Teleso sa bude pohybovať v gravitačnom poli $\vec{F} = (0, -mg, 0)$.

- Zapíšte a vyriešte pohybové rovnice v tomto prípade. Vyjadrite dráhu telesa ako $y(x)$ a ukážte, že ide o parabol.
- Za aký čas teleso dopadne? Ako ďaleko dopadne? Do akej maximálnej výšky sa teleso dostane? Pre aké hodnoty uhla α sú tieto výsledky najväčšie?
- Teleso hádzeme rovnako ako predtým, ale pred nami sa nachádza kopec so sklonom $\beta < \alpha$. Do akej vzdialenosti hore kopcom teleso doletí?
- Ako najďalej pozdĺž kopca vieme teleso vyhodíť?

Príklad 8. Majme harmonicky oscilujúce teleso, ktorého vlastná frekvencia je $\omega_0 = 3\omega$, pôsobí na neho odporová sila $-\kappa v$ a budiaca sila tvaru

$$F(t) = \cos \omega t + \frac{1}{2} \cos 3\omega t .$$

- Napíšte túto silu ako superpozíciu členov tvaru $F_\omega e^{i\omega t}$
- Nájdite úplne riešenie pohybovej rovnice v situácii, keď v čase $t = 0$ teleso s nulovou rýchlosťou pustíme z miesta x_0 .
- Ako bude toto riešenie vyzeráť po veľmi dlhom čase?

Príklad 9. Rozmyslite si, že pre gravitačnú silu

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r} ,$$

platí v polárnych súradniciach roviny, v ktorej sa teleso pohybuje, pre moment hybnosti

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

a pre energiu

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} .$$