Základy fyziky (1) - Cvičenie 9

Akékoľvek otázky smelo smerujte na
`juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

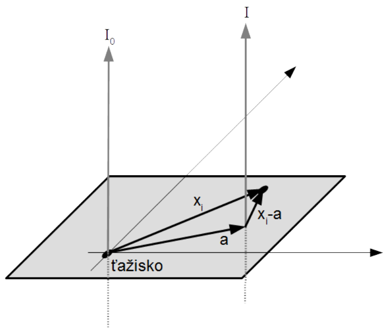
Cvičenie bolo 20.11.2024

$$I_{ab} = \sum m_i \left[(\vec{x}_i \cdot \vec{x}_i)\, \delta_{ab} - \vec{x}_{ia}\vec{x}_{ib} \right]$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) &= M_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) &= M_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) &= M_3 \end{aligned}$$

Príklad 1 (Steinerova veta)**.** Majme teleso, ktoré má okolo osi prechádzajúcej ťažiskom moment zotrvačnosti I_0. Ukáže, že okolo novej osi, ktorá je s tou pôvodnou rovnobežná a nachádza sa vo vzdialenosti a, má moment zotrvačnosti



$$I = I_0 + ma^2 \ .$$

Príklad 2. Nájdite pohybovú rovnicu matematického kyvadla, tj. jedného hmotného bodu na závese dĺžky l v homogénnom gravitačnom poli.

Príklad 3 (Fyzikálne kyvadlo)**.** Paličku zavesíme za jeden koniec a necháme kmitať v homogénnom gravitačnom poli. S akou periódou to bude? Ako to vyzerá pre všeobecné teleso, ktoré je zavesené za bod mimo jeho ťažiska?

Príklad 4. Valec položíme na naklonenú rovinu a necháme ho bez prešmykovania kotúľať nadol. Aké bude jeho zrýchlenie?

Príklad 5. Rolku toaletného papiera chytíme za koniec a uvoľníme. S akým zrýchlením sa bude pohybovať tesne po uvoľnení?

Príklad 6. Nájdite maticu momentu zotrvačnosti pre homogénnu paličku z úlohy o fyzikálnom kyvadle a pre homogénny disk polomeru R a hmotnosti M.

Príklad 7 (Precesia symetrického zotrvačníka)**.** Majme teleso, ktorého moment zotrvačnosti je $I = \mathrm{diag}(I_1, I_1, I_3)$. Preštudujte jeho pohyb v situácii s nulovým pôsobiacim momentom sily. Ako vyzerá jeho pohyb v termínoch Eulerovych uhlov?

Príklad 8 (Tenis racket theorem)**.** Majme všeobecné teleso s $I = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$. Overte, že $\vec{\omega} = (\omega_0, 0, 0)$ je riešenie Eulerovych dynamických rovníc s nulovým momentom sily. Preštudujte stabilitu tohto riešenie voči malým poruchám, t.j. ako sa správa pre riešenia tvaru $\vec{\omega} = (\omega_0 + \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ pre $\delta_i \ll \omega_0$.

Príklad 9 (Bicyklové koleso kvalitatívne)**.** Vyberte z rámu bicyklové koleso a zvislej polohe ho roztočte. Potom pustite jeden koniec osky kolesa a držte ho iba za ten druhý. Pokúste sa z rovnice $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ vysvetliť jeho následný pohyb.

Vyberte si jeden z príkladov a vyriešte ho. Druhý potom ako bonus.

Príklad 10. Máme štvorcový rám s hranou dĺžky a , ktorý má vo svojich troch vrcholoch hmotné body s hmotnosťou m a vo štvrtom hmotný bod s hmotnosťou $5m$.

a. Nájdite ťažisko tejto sústavy.

b. Nájdite moment zotrvačnosti tejto sústavy vzhľadom na stred štvorcového rámu.

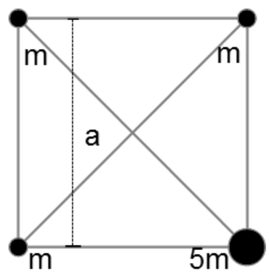
c. Nájdite moment zotrvačnosti tejto sústavy vzhľadom na ťažisko.

d. Overte Steinerovu vetu.

Rám aj s hmotnými bodmi teraz upevníme na os kolmú na rovinu štvorca a prechádzajúcu jeho stredom.

e. Nájdite rovnovážnu polohu sústavy.

f. Nájdite periódu kmitov tejto sústavy.

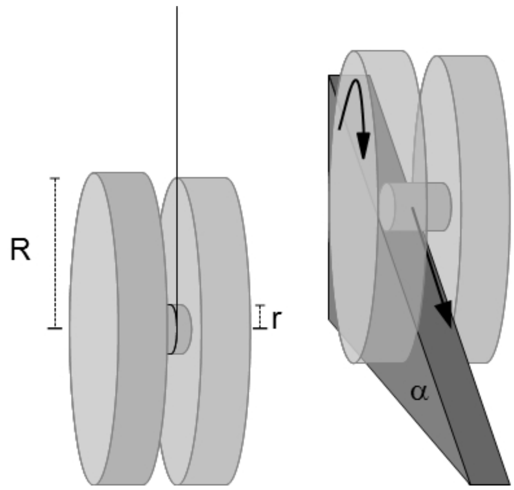


Príklad 11. Jojo vznikne spojením dvoch diskov polomeru R a hmotnosti M, medzi ktoré vložíme disku disk polomeru $r < R$ a hmotnosti m.

a. Vypočítajte moment zotrvačnosti disku okolo osi, ktorá prechádzaja jeho stredom a je kolmá na jeho rovinu.[1]

b. Okolo malého disku omotáme motúz, za ktorý jojo zavesíme a uvoľníme. Ak moment zotrvačnosti valca s polomerom ρ a hmotnosťou μ je $\mu\rho^2/2$, aké bude zrýchlenie joja hneď po uvoľnení?

c. Jojo potom položíme na naklonenú rovinu so skolonom α a necháme ho kotúľať sa smerom nadol. S akým zrýchlením sa bude pohybovať?[2]



[1] Rozmyslite si, že je potrebné spočítať integrál

$$I = \frac{m}{R^2}\int_0^R dr\, r\, r^2 \ .$$

[2] Na výpočet tohto príkladu pomože pozrieť sa na príklad o valci na naklonenej rovine, ktorý je vypočítaný v poznámkach.