

Základy fyziky (2)

Cvičenie 2

Akékoli otázka smerujte na
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Cvičenie bolo 25. 2. 2025

Príklad 1 (brachystochróna). Majme v priestore dva fixované body. Našou úlohou je nájsť tvar drôtu, ktorý tieto dva body spája, po ktorom sa teleso bez trenia pod pôsobením gravitácie dostane z jedného do druhého bodu za najkratší čas.

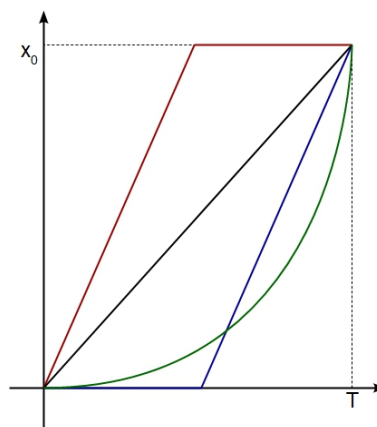
Príklad 2. V tejto úlohe budeme hľadať pohyb telesa v gravitačnom poli z princípu najmenšieho účinku.

V čas $t = 0$ je teleso vo výške H a chceme, aby na zem dopadlo v čase $t = T$. Vypočítajte účinok pri rovnomernom priamočiariom pohybe. Potom vypočítajte účinok pri rovnomerne zrýchlenom pohybe a ukážte, že ten je minálny pre prípad zrýchlenia s hodnotou $-g$ a že hodnota účinku v tomto prípade je menšia, ako pre rovnomerný priamočiary pohyb.

Na domácu úlohu sú nasledujúce dva príklady.

Príklad 3. Teleso sa pohybuje po vodorovnej priamke a v čase $t = 0$ sa nachádza v mieste $x = 0$. Chceme, aby za čas T prešlo do bodu $x = x_0$. Uvažujte nasledujúce pohyby telesa (obrázok)

- rovnomerný priamočiary
- rovnomerný priamočiary za polovičný čas a potom stálie
- stálie a potom rovnomerný priamočiary za polovičný čas
- rovnomerne zrýchlený
- pohyb, pri ktorom $v \sim t^3$



Niektoré z príbehov polohy.

Vypočítajte účinok pri všetkých týchto pohyboch a overte, že skutočný pohyb má najmenší účinok.

Príklad 4. Nájdite pohybové rovnice pre účinok

$$S = -mc \int ds$$

s nasledujúcim dĺžkovým elementom

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2V}{mc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2V}{mc^2}\right) dx^2,$$

pre nejakú funkciu $V(x)$. Nájdite aj jednoduchší tvar v prípade $V \ll mc^2$.

Príklad 5. Z princípu najmenšieho účinku ukážte, že lagranžiány

$$L \text{ a } \lambda L + \dot{f}$$

vedú na rovnaké pohybové rovnice.

Príklad 6. Z fermatovho princípu odvoďte Snellov zákon. Fermatov princíp hovorí, že svetlo sa medzi dvomi bodmi pohybuje po takej dráhe, aby mu cesta trvala najkratší čas. Snellov zákon hovorí, že $n \sin \theta = \text{const}$.

Príklad 7. Nájdite pohybové rovnice pre účinok

$$S = -mc \int ds$$

s nasledujúcim dĺžkovým elementom

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2V}{mc^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 + \frac{2V}{mc^2}} dx^2 ,$$

pre nejakú funkciu $V(x)$. Nájdite aj jedoduchší tvar v prípade $V \ll mc^2$.

Príklad 8.

- Ukážte, že účinok má rovnaký rozmer ako Planckova konštanta $\hbar$.
- Vypočítajte účinok pri jednom obehu Zeme okolo Slnka.
- Vypočítajte účinok pri páde kameňa na zem z výšky $10m$.
- Vypočítajte účinok pri obehu elektrónu okolo protónu v jadre atómu vodíka.