

Základy fyziky (2)

Cvičenie 3

Cvičenie bolo 4. 3. 2025

Akkoľvek otázky smelo smerujte na
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Príklad 1. Načrtnite ako vyzerajú nasledujúce vektorové polia a vypočítajte ich divergenciu a rotáciu.

$$\vec{v} = (x, -y, 0) \quad (1)$$

$$\vec{v} = (y, -x, 0) \quad (2)$$

Príklad 2. Odvoďte vzťah

$$\frac{\partial}{\partial x} |\vec{x}| \equiv \frac{\partial}{\partial x} r = \frac{x}{r}.$$

Vypočítajte

$$\frac{\partial}{\partial x} r^n.$$

Príklad 3. Na základne predchádzajúcej úlohy odvoďte vzťah pre

$$\vec{\nabla}(r^n), \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{x}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{x}.$$

Špeciálne je zaujímavý prípad $n = -1$.

Príklad 4. Načrtnite ako vyzerajú nasledujúce vektorové polia a vypočítajte ich divergenciu a rotáciu.

$$\vec{v} = \frac{\vec{c}}{r} \quad (3)$$

Na domácu úlohu sú nasledujúce dve úlohy. Druhá je asi trochu ťažšia, takže si nerobte veľké starosti, ak ju úplne nezvládnete, prejdeme ju na cvičení. Ale určite sa naď ňou zamyslite a situáciu si dobre premyslite.

Príklad 5. Načrtnite ako vyzerajú nasledujúce vektorové polia a vypočítajte ich divergenciu a rotáciu.

$$\vec{v} = (\vec{c} \cdot \vec{x}) \vec{x} \quad (4)$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{x}}{r} \quad (5)$$

$$\vec{v} = \vec{c} \times \vec{x} \quad (6)$$

Príklad 6.

- Napíšte najvšeobecnejšie možné radiálne pole rýchlosti $\vec{v}$.
- Ako vyzerá tok tohto poľa cez sféru s polomerom R ?
- Majme v počiatku zdroj, ktorý za jednotku času vypustí sféricky symetricky objem vody V_0 , ktorá ďalej tečie ako nestlačiteľná kvapalina, stále symetricky. Na základe prvého dychu nájdite pole rýchlostí, ktoré popisuje takýto tok.
- Nájdite jeho divergenciu.

A niekoľko ďalších príkladov na precvičenie.

Príklad 7. Načrtnite ako vyzerajú nasledujúce vektorové polia a vypočítajte ich divergenciu a rotáciu.

$$\vec{v} = (-x, 0, 0) \quad (7)$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x, -y, 0) \quad (8)$$

$$\vec{v} = (x + y, -x + y, -2z) \quad (9)$$

$$\vec{v} = (2y, 2x + 3z, 3y) \quad (10)$$

$$\vec{v} = (3x^2, 2x + y, z) \quad (11)$$

Príklad 8. Načrtnite ako vyzerajú nasledujúce vektorové polia a vypočítajte ich divergenciu a rotáciu.

$$\vec{v} = \frac{\vec{c}}{r} \quad (12)$$

Príklad 9. Čomu sa rovnajú nasledovné výrazy

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \quad (13)$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (14)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \quad (15)$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \quad (16)$$

Príklad 10. Ako vyzerá vektorové pole, ktoré popisuje rýchlosť elementov rovnomerne sa pohybujúceho telesa? Aká je jeho divergencia a rotácia?

Príklad 11. Ako vyzerá vektorové pole, ktoré popisuje rýchlosť elementov rovnomerne sa otáčajúceho disku? Aká je jeho divergencia a rotácia?

Príklad 12. Ako vyzerá vektorové pole rýchlostí disku, ktorý sa otáča a popri tom rovnomerne pohybuje? Aká je jeho divergencia a rotácia?

Príklad 13. Ako vyzerá vektorové pole rýchlostí v gumenej kocke, ktorej dve protiľahlé stený k sebe rovnomerne približujeme? Aká je jeho divergencia a rotácia? Je v tomto prípade splnená rovnica kontinuity?

Príklad 14. Ako vyzerá vektorové pole rýchlostí v gumenom disku, ktorého os je fixovaná a ktorého obovď rovnomerne otáčame? Je v tomto prípade splnená rovnica kontinuity?