

Základy fyziky (1)

Doplnkové Úlohy

Akékolvek otázky smelo smerujte na
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Zadané 8.1.2026

Príklad 1. Vyšetrite pohyb v jednorozmernom potenciály¹

$$V(x) = V_0 \left[a \frac{x}{R} + b \frac{x^2}{R^2} \right] e^{-x/R}, \quad a, b > 0.$$

- Nájdite rovnovážne polohy a vyšetrite ich stabilitu.
- Pre stabilné rovnovážne polohy nájdite frekvenciu malých kmitov okolo tejto polohy.
- Kvalitatívne charakterizujte možné pohyby pre rôzne hodnoty počiatočnej polohy x_0 v prípade $v(0) = 0$.
- Nakreslite zodpovedajúci fázový portrét.

Príklad 2. Porovnajte energiu potrebnú na vystrelenie telesa mimo Slnčnú sústavu s energiou potrebnou na hodenie telesa do Slnka.

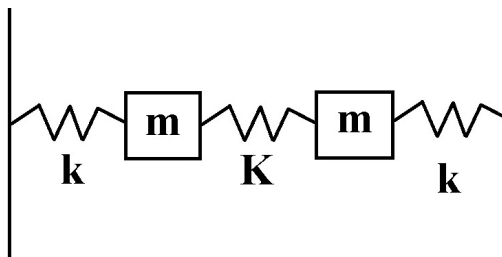
Príklad 3. Budeme študovať pohyb telesa v gravitačnom poli slnka s potenciálom $-mk/r$ s malou poruchou $-A/r^2$.

- Nájdite silu, ktorá pôsobí na teleso v takomto prípade.
- Napíšte rovnicu, ktorú spĺňa premenná $u(\theta) = 1/r(\theta)$ a vyriešte ju.
- Z bodu $r = r_0, \theta = 0$ vypustíme rýchlosťou v_0 teleso v smere kolmom na polohový vektor. Za akých podmienok bude pohyb telesa ohraničený?
- Ukážte, že za takých podmienok sa teleso bude nachádzať opäť vo vzdialenosti r_0 po otočení o uhol

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{2A}{mv_0^2 r_0^2}}} \quad (1)$$

Interpretujte tento výsledok pre malé A ako stáčanie orbity.

Príklad 4. Majme dve rovnaké telesá hmotnosti m , spojené pružinkami s rôznou tuhosťou do lineárnej retiazky a na krajoch upevnené na fixovanú stenu.



¹ Ako cvičenie tiež určite rozmer všetkých vystupujúcich konštánt.

- Napíšte pohybové rovnice pre výchylku z rovnovážnej polohy každého telesa.
- Napíšte tieto rovnice v maticovom tvare a nájdite frekvencie jednotlivých módo. Nájdite zodpovedajúce vlastné vektory a stručne opíšte pohyb, ktorý telesá vykonávajú v tom ktorom móde.
- Ukážte, že v módoch, v ktorých sa mení poloha ťažiska platí rovnica

$$\text{súčet hmotností} \times \text{zrýchlenie ťažiska} = \text{súčet vonkajších síl}. \quad (2)$$

Príklad 5.

- a. Rozmyslite si, že pre dosku tvaru štvorca s hranou a je moment zotrvačnosti vzhľadom na os kolmú na dosku a prechádzajúcu stredom daný vzťahom

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \frac{m}{a^2} (x^2 + y^2) . \quad (3)$$

Vypočítajte tento integrál.

- b. Dosku zavesíme za jeden z vrcholov a necháme kmitať vo zvislej rovine dosky. Aká bude perióda tohto pohybu?

Príklad 6. Na chvíľu predpokladajte, že neviete riešiť šikmý vrh v homogénnom gravitačnom poli a k úlohe pristúpte numericky. To znamená, že budeme riešiť sústavu rovníc

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{x}} &= 0 \\ m\ddot{y} &= -mg \\ \vec{x}(0) &= (x_0, y_0) \quad , \quad \vec{v}(0) = v(\cos \alpha, \sin \alpha). \end{aligned}$$

- a. Spomeňte si, ako fungovalo riešenie pohybových rovníc numericky. Ako zo sily v nejakom čase dostaneme zrýchlenie? Ako zo zrýchlenia v danom čase rýchlosť o čosi neskôr? Ako z rýchlosti polohu? Ako vypočítame zrýchlenie o čosi neskôr?
- b. Spravte program (napríklad v Excely), ktorý vaše predchádzajúce úvahy zrealizuje a nasimulujte pohyb telesa.
- c. Vhodne zvolte počiatočné podmienky a zistite
- výšku dosiahnutú pri vrhu nahor,
 - čas voľného pádu,
 - dolet pri šikmom vrhu.
- d. Ako veľmi je váš program citlivý na voľbu časového kroku. Teraz si spomeňte, že úlohu vlastne riešiť viete a porovnajte vaše výsledky s presným výsledkom.
- e. Isto uznáte, že tento prípad je trochu triviálny. Modifikujte váš program pre prípad jednorozmerného harmonického oscilátora, tj. $\vec{F} = (-kx, 0)$. Dostávate výsledky, ktoré zodpovedajú realite?
- f. **Bonus.** Tu sa možnosti vášho programu nekončia, ale iba začínajú. Môžete voliť ľubovoľné silové pôsobenie, aj také, ktoré neviete riešiť analyticky, a sledovať ako sa teleso bude pohybovať.

Príklad 7. Odmerajte hodnotu gravitačného zrýchlenia g dvomi rôznymi metódami. Nezabudnite na odhad chyby merania.

Príklad 8. Na spoločnom závese visia na špagátoch dĺžky L dve guľičky hmotnosti m . Sú elektricky nabité, takže sa odpudzujú silou, ktorá je rovná kq^2/r^2 , kde r je vzdialenosť guľičiek. Okrem toho je medzi nimi pružina, ktorá má tuhosť K a v nenatiahnutom stave nulovú dĺžku. A aby toho nebolo málo, celé sa to otáča okolo zvislej osi uhlovou rýchlosťou ω .

- a. Aký uhol zvierajú špagáty v rovnovážnej polohe?
- b. Aká je perióda malých kmitov guľičiek okolo tejto rovnovážnej polohy?