

Základy fyziky (1) - Cvičenie 9

Akkoľvek otázky smelo smerujte na
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Cvičenie bolo 18.11.2025

$$I_{ab} = \sum m_i [(\vec{x}_i \cdot \vec{x}_i) \delta_{ab} - \vec{x}_{ia} \vec{x}_{ib}]$$

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

$$\omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

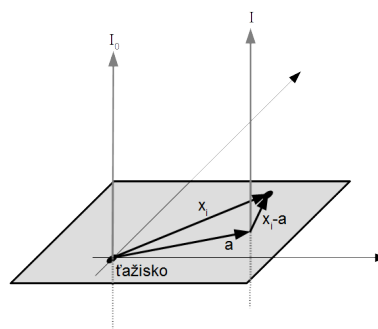
$$I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) = M_1$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) = M_2$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) = M_3$$

Príklad 1 (Steinerova veta). Majme teleso, ktoré má okolo osi prechádzajúcej ťažiskom moment zotrvačnosti I_0 . Ukáže, že okolo novej osi, ktorá je s tou pôvodnou rovnobežná a nachádza sa vo vzdialenosti a , má moment zotrvačnosti

$$I = I_0 + ma^2.$$



Príklad 2. Nájdite pohybovú rovnicu matematického kyvadla, t.j. jedného hmotného bodu na závese dĺžky l v homogénnom gravitačnom poli.

Príklad 3 (Fyzikálne kyvadlo). Paličku zavesíme za jeden koniec a necháme kmitať v homogénnom gravitačnom poli. S akou periódou to bude? Ako to vyzerá pre všeobecné teleso, ktoré je zavesené za bod mimo jeho ťažiska?

Príklad 4. Valec položíme na naklonenú rovinu a necháme ho bez prešmykovania kotúľať nadol. Aké bude jeho zrýchlenie?

Príklad 5. Rolku toaletného papiera chytíme za koniec a uvoľníme. S akým zrýchlením sa bude pohybovať tesne po uvoľnení?

Príklad 6. Nájdite maticu momentu zotrvačnosti pre homogénnu paličku z úlohy o fyzikálnom kyvadle a pre homogénny disk polomeru R a hmotnosti M .

Príklad 7 (Precesia symetrického zotrvačníka). Majme teleso, ktorého moment zotrvačnosti je $I = \text{diag}(I_1, I_1, I_3)$. Preštudujte jeho pohyb v situácii s nulovým pôsobiacim momentom sily. Ako vyzerá jeho pohyb v termínoch Eulerových uhlov?

Príklad 8 (Tennis racket theorem). Majme všeobecné teleso s $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$. Overte, že $\vec{\omega} = (\omega_0, 0, 0)$ je riešenie Eulerových dynamických rovníc s nulovým momentom sily. Preštudujte stabilitu tohto riešenia voči malým poruchám, t.j. ako sa správa pre riešenia tvaru $\vec{\omega} = (\omega_0 + \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ pre $\delta_i \ll \omega_0$.

Príklad 9 (Bicyklové koleso kvalitatívne). Vyberte z rámu bicyklové koleso a zvislej polohe ho roztočte. Potom pustite jeden koniec osky kolesa a držte ho iba za ten druhý. Pokúste sa z rovnice $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ vysvetliť jeho následný pohyb.

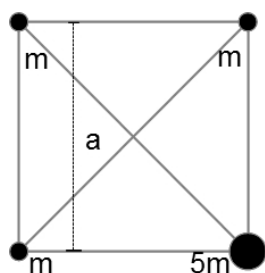
Vyberte si jeden z príkladov a vyriešte ho. Druhý potom ako bonus.

Príklad 10. Máme štvorcový rám s hranou dĺžky a , ktorý má vo svojich troch vrchoch hmotné body s hmotnosťou m a vo štvrtom hmotný bod s hmotnosťou $5m$.

- Nájdite ťažisko tejto sústavy.
- Nájdite moment zotrvačnosti tejto sústavy vzhľadom na stred štvorcového rámu.
- Nájdite moment zotrvačnosti tejto sústavy vzhľadom na ťažisko.
- Overte Steinerovu vetu.

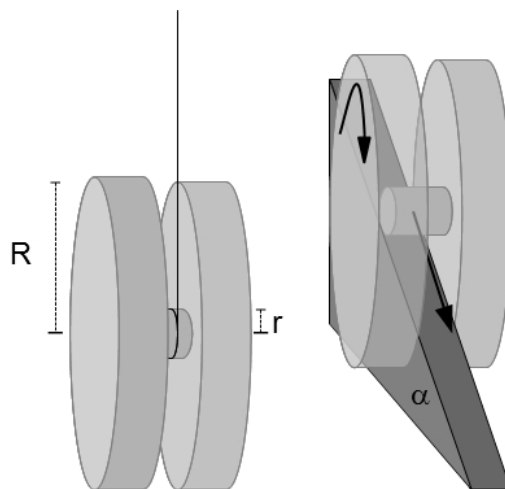
Rám aj s hmotnými bodmi teraz upevníme na os kolmú na rovinu štvorca a prechádzajúcu jeho stredom.

- Nájdite rovnovážnu polohu sústavy.
- Nájdite periódu kmitov tejto sústavy.



Príklad 11. Jojo vznikne spojením dvoch diskov polomeru R a hmotnosti M , medzi ktoré vložíme disk polomeru $r < R$ a hmotnosti m .

- Vypočítajte moment zotrvačnosti disku okolo osi, ktorá prechádza jeho stredom a je kolmá na jeho rovinu.¹
- Okolo malého disku omotáme motúz, za ktorý jojo zavesíme a uvoľníme. Ak moment zotrvačnosti valca s polomerom ρ a hmotnosťou μ je $\mu\rho^2/2$, aké bude zrýchlenie joja hneď po uvoľnení?
- Jojo potom položíme na naklonenú rovinu so sklonom α a necháme ho kotúľať sa smerom nadol. S akým zrýchlením sa bude pohybovať?²



¹Rozmyslite si, že je potrebné spočítať integrál

$$I = \frac{m}{R^2} \int_0^R dr r r^2 .$$

²Na výpočet tohto príkladu pomôže pozrieť sa na príklad o valci na naklonenej rovine, ktorý je vypočítaný v poznámkach.