Všeobecný pohyb (po všeobecnej trajektórii)

Všeobecný pohyb je daný ľubovoľnou časovou závislosťou polohového vektora

$$\vec{r}(t)$$

Trajektóriou častice sa nazýva krivka v (normálnom trojrozmernom) priestore, po ktorej sa častica v priebehu času pohybovala, teda dráha častice. Je to čosi ako stopa častice, ktorú „zanechala“ v priestore.

Priestorová krivka je všeobecnejší matematický pojem, nemusí sa jednať o dráhu nejakej častice.

Matematickú krivku je šikovné zadať v tzv. parametrickom tvare

$$\vec{r}(\xi)$$

kde definičný obor parametra ξ je nejaký interval, často (0,1).
Ak sa jedná o dráhu častice, a poznáme časový priebeh pohybu po tej dráhe, potom prirodzeným parametrickým vyjadrením dráhe je použiť čas ako parameter. Teda vyjadrenie $\vec{r}(t)$. Niekedy poznáme trajektóriu ale nie časový priebeh pohybu po nej. Vtedy je často výhodné použiť ako parameter pre parametrické vyjadrenie dráhy dĺžku dráhy (od začiatku dráhy až po uvažovaný bod).

Ak poznáme časový priebeh pohybu po trajektórii $\vec{r}(t)$, potom je priamočiare prepísať trajektóriu do parametrického tvaru podľa dĺžky prejdenej dráhy. Dráha sa vypočíta takto (bodka nad symbolom značí derivovanie podľa času)

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(\tau)| d\tau \qquad (1)$$

Predpokladajme, že rovnica (1) sa dá obrátiť, teda vyjadriť t pomocou s. Potom parametrické vyjadrenie pomocou s bude

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(s(t))$$

Dĺžka trajektórie ako všeobecnej matematickej krivky je definovaná nezávisle na nejakom pohybe. Ak máme všeobecnú parametrizáciu $\vec{r}(\xi)$, môžeme dĺžku krivky od počiatku až po hodnoty parametra ξ vyjadriť zjavne takto

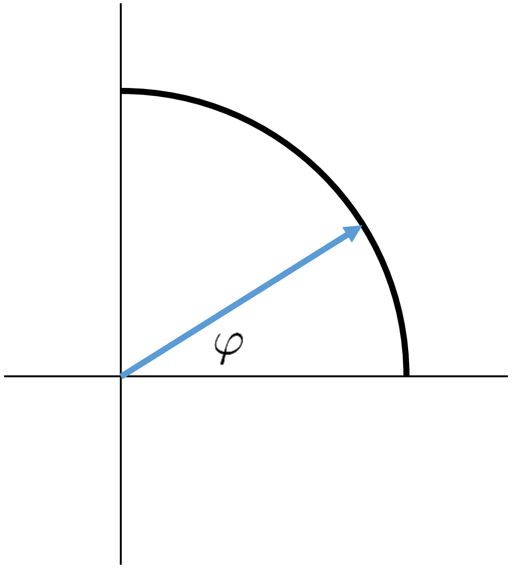
$$ds = |d\vec{r}| = |\frac{d\vec{r}(\xi)}{d\xi}| d\xi$$

$$s(\xi) = \int_0^\xi |\frac{d\vec{r}(\tilde{\xi})}{d\tilde{\xi}}| d\tilde{\xi} \qquad (2)$$

Predpokladajme, že rovnica (2) sa dá obrátiť, teda vyjadriť ξ pomocou s. Potom parametrické vyjadrenie pomocou s bude

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(s(\xi))$$

Príklad: krivka – štvrťkružnica – parametrizovaná pomocou stredového uhla



$$\vec{r}(\varphi) = (R\cos(\varphi), R\sin(\varphi), 0), \qquad \varphi = \in (0, \pi/2)$$

$$ds = |\frac{d\vec{r}}{d\varphi}|d\varphi = \sqrt{R^2\sin^2(\varphi) + R^2\cos^2(\varphi)}d\varphi = Rd\varphi$$

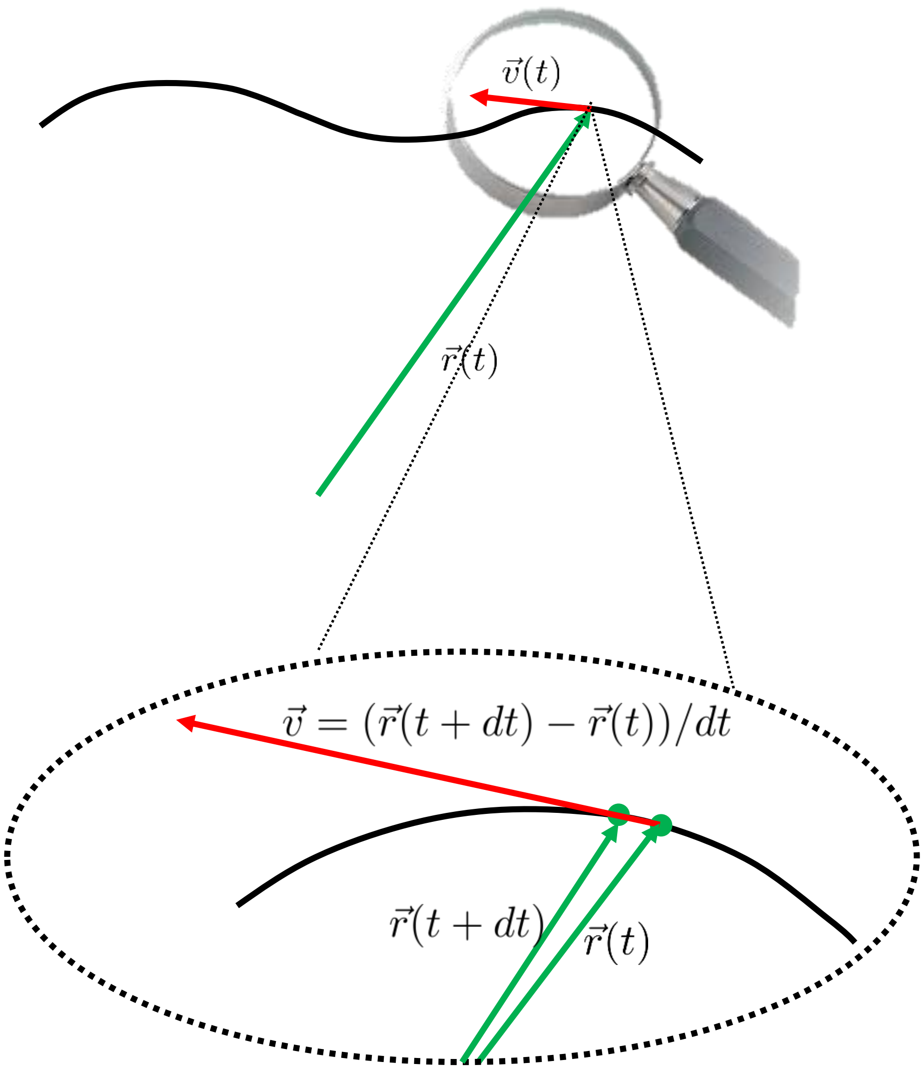
$$s(\varphi) = \int_0^{\varphi} Rd\tilde{\varphi} = R\varphi$$

$$\varphi(s) = \frac{s}{R}$$

$$\boxed{\vec{r}(s) = (R\cos(s/R), R\sin(s/R), 0), \qquad s \in (0, \pi R/2)}$$

Nerovnomerný pohyb po ľubovoľnej krivke

Uvažujme všeobecný pohyb častice daný časovým priebehom $\vec{r}(t)$



Rýchlosť v čase t bude

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}(t) = |\vec{v}(t)|\vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$ je jednotkový vektor v smere rýchlosti v bode $\vec{r}(t)$. Otázka je, v akom vzťahu je vektor $\vec{\tau}$ ku trajektórii v bode $\vec{r}(t)$. Tvrdíme, že **vektor $\vec{\tau}$ má smer dotyčnice k trajkektórii**.

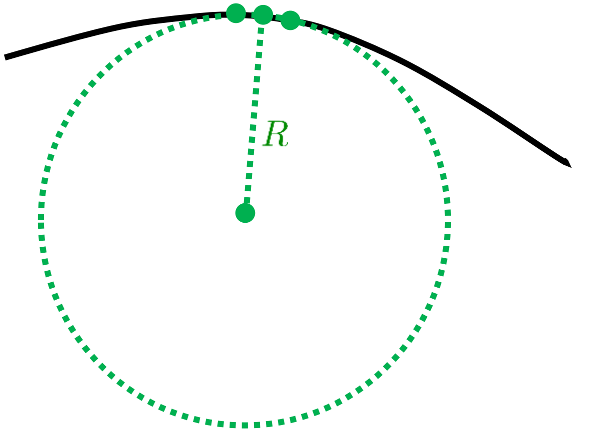
Naozaj: pre výpočet vektora rýchlosti sú dôležité dva (infinitezimálne) blízke body trajektórie, vektor rýchlosti a teda aj $\vec{\tau}$ má smer spojnice tých dvoch bodov

Definícia dotyčnice ku krivke je:

Je to priamka prechádzajúca dvoma infinitezimálne blízkymi bodmi krivky

Oskulačná kružnica

Uvažujme všeobecnú krivku a na nej tri (infinitezimálne) blízke body. Krivka vo všeobecnosti neleží v jednej rovine. Ale tri nejaké body určujú rovinu a súčasne v tej rovine jednoznačne nejakú kružnicu, ktorá sa nazýva **oskulačná kružnica** tej krivky v jednom jej bode (v strednom z tých troch bodov). Polomer oskulačnej kružnice sa nazýva **polomer krivosti krivky** v uvažovanom bode.
Súčasne je zrejmé, že krivka a jej oskulačná kružnica majú v uvažovanom bode **spoločnú dotyčnicu**.



Prijmime intuitívne bez rigorózneho dôkazu, že v limite, keď uvažované tri body budú nekonečne blízko pri sebe, postupnosť nimi tvorených kružníc sa bude blížiť k limitnej oskulačnej kružnici v uvažovanom bode. V matematickej limite je teda oskulačná kružnica „bodový pojem“, fyzikálne je to „trojbodový pojem“ (v tom zmysle ako sme sa bavili, že rýchlosť je „dvojbodový pojem“ a zrýchlenie „trojbodový“

Všeobecný pohyb (po všeobecnej trajektórii)

Všeobecný pohyb častice je daný ľubovoľnou časovou závislosťou polohového vektora $\vec{r}(t)$

Uvedená funkcia je súčasne časovou parametrizáciou krivky – trajektórie. Uvažujme nejaký časový okamih t_0. V tomto okamihu sa častica bude nachádzať v nejakom konkrétnom bude trajektórie, bude mať nejakú rýchlosť a zrýchlenie.

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \qquad \vec{v}_0 = \vec{v}(t_0) = \dot{\vec{r}}(t_0), \qquad \vec{a}_0 = \vec{a}(t_0) = \ddot{\vec{r}}(t_0)$$

Uvažujme oskulačnú kružnicu trajektórie v bode $\vec{r}_0$. A uvažujme fiktívny (všeobecne nerovnomerný) pohyb fiktívnej častice po oskulačnej kružnici taký, že v čase t_0 sa táto fiktívna častica nachádza v bode $\vec{r}_0$ a má rýchlosť $\vec{v}_0$ a zrýchlenie a_0. Teda presne rovnaké ako uvažovaná skutočná častica na skutočnej trajektórii. Rýchlosť fiktívnej častice má smer dotyčnice k oskulačnej kružnici, čo zjavne je totožné s dotyčnicou ku skutočnej trajektórii v uvažovanom bode. Aj skutočná častica má rýchlosť v smere tej dotyčnice, to už sme zistili. Jednotkový vektor v smere tej dotyčnice označme $\vec{\tau}_0$. Ako vieme z diskusie o nerovnomernom pohybe častice po kružnici, zrýchlenie fiktívnej častice na oskulačnej kružnici môžeme rozložiť do tangenciálneho a normálového smeru, tam sme písali

$$\boxed{\vec{a} = \dot{\omega} r \vec{\tau} - \omega^2 r \vec{n} \qquad |\vec{v}| = \omega r \qquad \dot{\omega} = \frac{1}{r}\frac{d|\vec{v}|}{dt}}$$

Všeobecný pohyb (po všeobecnej trajektórii)

Všeobecný pohyb častice je daný ľubovoľnou časovou závislosťou polohového vektora $\vec{r}(t)$

Uvedená funkcia je súčasne časovou parametrizáciou krivky – trajektórie. Uvažujme nejaký časový okamih t_0. V tomto okamihu sa častica bude nachádzať v nejakom konkrétnom bude trajektórie, bude mať nejakú rýchlosť a zrýchlenie.

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \qquad \vec{v}_0 = \vec{v}(t_0) = \dot{\vec{r}}(t_0), \qquad \vec{a}_0 = \vec{a}(t_0) = \ddot{\vec{r}}(t_0)$$

Uvažujme oskulačnú kružnicu trajektórie v bode $\vec{r}_0$. A uvažujme fiktívny (všeobecne
nerov … t_0 sa
táto fi … da
presn … chlosť
fiktívn … é s
dotyč … ná
rýchlo … ej
dotyč … ce po
kružn … lo
tange …

Takže teraz dostaneme v prirodzenejšom označení (bez použitia ω)

$$\vec{a}_0 = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{\tau}_0 - \frac{|\vec{v}_0|^2}{R_0}\vec{n}_0$$

kde R_0 je polomer oskulačnej kružnice trajektórie v bode $\vec{r}_0$. Na označenie polomeru sme použili veľké písmeno R aby sa to neplietlo s dĺžkou sprievodiča.

$$\vec{a} = \dot{\omega} r \vec{\tau} - \omega^2 r \vec{n} \qquad |\vec{v}| = \omega r \qquad \dot{\omega} = \frac{1}{r}\frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a}_0 = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{\tau}_0 - \frac{|\vec{v}_0|^2}{R_0}\vec{n}_0}$$

Vektor $\vec{n}_0$ je jednotkový vektor normály trajektórie v bode $\vec{r}_0$, je kolmý na dotyčnicu $\vec{\tau}_0$, leží v rovine oskulačnej kružnice a má smer od stredu oskulačnej kružnice von. Znamienko – v rovnici potom znamená že normálová zložka **smeruje do stredu** oskulačnej kružnice, hovoríme o **dostredivom zrýchlení**.

Tangenciálne zrýchlenie teda vypovedá o zmene veľkosti rýchlosti, normálové (dostredivé) zrýchlenie o zmene smeru rýchlosti. Zapamätajte si vzorec pre veľkosť dostredivého zrýchlenia

$$\boxed{\frac{|\vec{v}|^2}{R}}$$

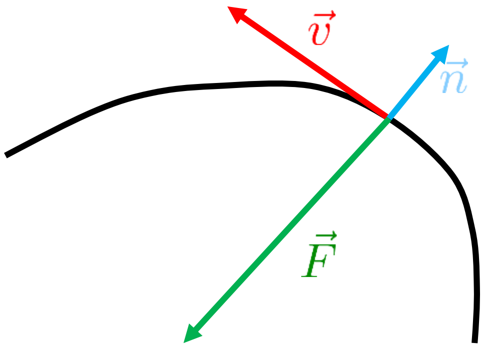
Zdôraznime ešte, že dotyčnica ku krivke je väčšine ľudí intuitívne zrejmý pojem aj pri priestorovej krivke, ktorá neleží v nejakej rovine. Ale normálový vektor kolmý k dotyčnici vlastnosťou kolmosti nie je určený jednoznačne, musíme ešte určiť, v ktorej rovine leží. Je to práve rovina oskulačnej kružnice. Teda vektor normály ku krivke „je trojbodový pojem“, kým vektor dotyčnice ku krivke je „je dvojbodový pojem“.

V doterajšej úvahe sme zatiaľ iba intuitívne prijali takúto konštrukciu

Uvažujme oskulačnú kružnicu trajektórie v bode $\vec{r}_0$. A uvažujme fiktívny (všeobecne nerovnomerný) pohyb fiktívnej častice po oskulačnej kružnici taký, že v čase t_0 sa táto fiktívna častica nachádza v bode $\vec{r}_0$ a má rýchlosť $\vec{v}_0$ a zrýchlenie a_0. Teda presne rovnaké ako uvažovaná skutočná častica na skutočnej trajektórii.

Nebudeme sa snažiť o rigorózny dôkaz, že je to možné, teda že fiktívna častica na oskulačnej kružnici môže mať rovnakú polohu, rýchlosť aj zrýchlenie ako skutočná častica na skutočnej trajektórii. Nie je to tvrdenie triviálne. Uvedomme si napríklad, že by sme sa nemohli pokúsiť o konštrukciu fiktívnej častice hýbucej sa na fiktívnej **priamke** (dotyčnici) tak, aby mala rovnaké zrýchlenie ako skutočná častica na skutočnej trajektórii. Polohu a rýchlosť by mohla mať rovnakú, aj tangenciálne zrýchlenie ale nie normálové zrýchlenie, lebo to vypovedá o zmene smeru, a priamka smer nemení!
Fakt, že s oskulačnou kružnicou to funguje, je založený na tom, že oskulačná kružnica je „trojbodový pojem“ rovnako ako zrýchlenie. Spoločné tri body trajektórie a oskulačnej kružnice zabezpečia, že to bude fungovať. Predumajte si to. Pre hĺbavejších a matematicky vzdelanejších pridávame ešte poznámku, že sa vlastne jedná o Taylorov rozvoj vektorovej funkcie $\vec{r}(t)$ do druhého rádu podľa času v okolí bodu t_0.

Dostredivá sila



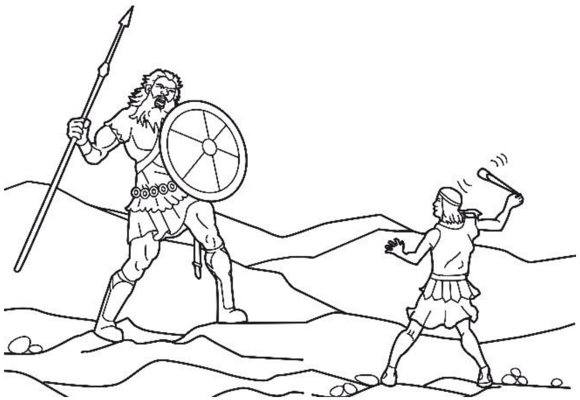
Ak sa častica pohybuje po zakrivenej dráhe, má dostredivé zrýchlenie a teda naň musí pôsobiť dostredivá sila

$$\vec{F}_{\text{dostr}} = m\vec{a}_{\text{dostr}} = -\frac{mv^2}{r}\vec{n}$$

kde r je polomer krivosti trajektórie.

Keby nepôsobila dostredivá sila, častica by pokračovala zotrvačným rovnomerným priamočiarym pohybom v smere dotyčnice, ako to napríklad vidno na odbrúsených časticiach kovu pri brúsení:

Príklady dostredivej sily

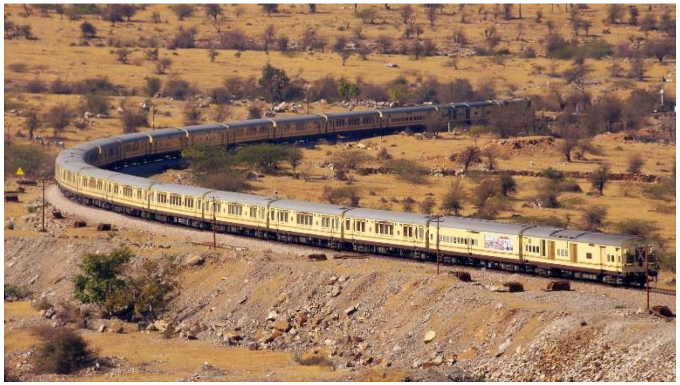


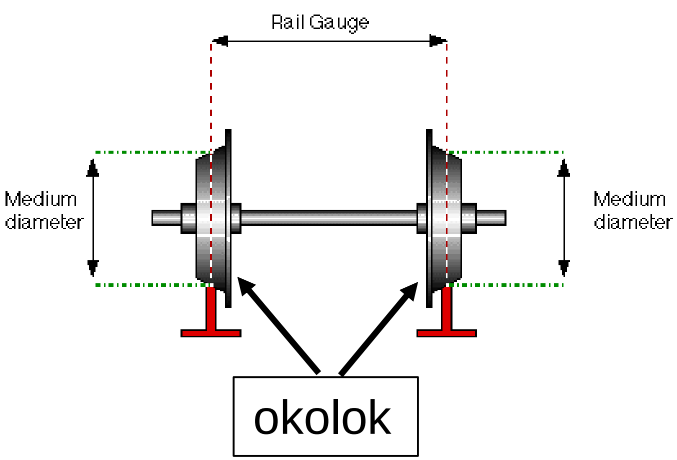
Dávid zabil Goliáša kameňom vrhnutým prakom. Prak rozkrúti nad hlavou, kameň sa pohybuje po kruhovej dráhe a v okamihu uvoľnenia je vymrštený po dotyčnici. Otázka je kto/čo pôsobí dostredivou silou, ktorá udržiava kameň na kruhovej dráhe. Odpoveď: napätie prakovej šnúry.

Trochu zložitejšie je predumať si, ako to napätie šnúry vzniká. Použijeme trochu dadaistické „vysvetlenie“. Kameň „chce pokračovať“ po dotyčnicovej priamej dráhe. Ale narazí pri tom na kožené „vrecko“, cez ktoré „nemôže pokračovať“ v rovnej ceste. Prečo? Lebo by „musel potlačiť“ molekuly „vrecka“. Kameň teda pôsobí silovo (medzimolekulovými silami) na molekuly vrecka.

Molekuly vrecka podľa princípu akcie a reakcie pôsobia na kameň a vytvárajú dostredivú silu. Ale prečo molekuly vrecka proste „neuhnú“. Lebo na seba navzájom pôsobia silami a silové pôsobenie „technikou“ akcie a reakcie prenáša až na tie molekuly vrecka, ktoré „cítia“ molekuly šnúry. Tie sa snažia potiahnuť molekuly šnúry smerom von z kruhu a tie odpovedajú reakciu smerom dovnútra kruhu. Dostredivá sila.

Príklady dostredivej sily





Prečo vlak na koľajniciach v zákrute „nevybehne z koľají“? Úplná teória je dosť zložitá (všimnite si, že obvody kolies nie sú valcového ale kužeľového tvaru), ale dôležitú úlohu zohrávajú okolky na vnútorných stranách vlakových kolies. Okolky sa pri prejazde zákrutou opierajú o koľajnicu, „chceli by sa pretlačiť cez koľajnicu aby vlak mohol pokračovať rovno“, tlačia na koľajnicu a koľajnica rekciou tlačí na okolky dostredivou silou. V zákrute je to vonkajšia koľajnica, na ktorú tlačia okolky vonkajších kolies. Preto vnútorná stena vonkajšej koľajnice je viac vybrúsená ako vnútorná stena vnútornej koľajnice.

Príklady dostredivej sily

Ak vidím vlak pohybujúci sa rýchlosťou v, že prechádza zákrutou s polomerom krivosti r, potom viem, že naň pôsobí dostredivá sila mv^2/r. Vzniká otázka: Ako koľajnice „vedia“, že majú pôsobiť presne takto veľkou silou? Ani väčšou ani menšou. Poznajú vari rýchlosť vlaku?

Čo by ste odpovedali decku na takú otázku?

Príklady dostredivej sily

Ak vidím vlak pohybujúci sa rýchlosťou v, že prechádza zákrutou s polomerom krivosti r, potom viem, že naň pôsobí dostredivá sila mv^2/r. Vzniká otázka: Ako koľajnice „vedia", že majú pôsobiť presne takto veľkou silou? Ani väčšou ani menšou. Poznajú vari rýchlosť vlaku?

Čo by ste odpovedali decku na takú otázku?

Tu je pokus o odpoveď, stál v trochu dadaistickom štýle.

Keď vlak vchádza do zákruty, koľajnice ešte nepôsobia žiadnou dostredivou silou. Kolesá sa teda „pokúšajú vniknúť do koľajnice a prekonať ju", čo spôsobí reakciu koľajnice, zrejme na začiatku nie dosť veľkú ako je veľkosť potrebnej dostredivej sily. Koľajnica je už tlakom kolies čiastočne deformovaná. Ale kolesá nedajú pokoj a zatláčajú sa hlbšie, čo zvyšuje veľkosť reakcie koľajníc a teda veľkosť dostredivej sily. Keď sa postupne (za zlomok sekundy) dosiahne „správna veľkosť sily", kolesá už „vykresľujú správnu trajektóriu" a nepokúšajú sa zatláčať hlbšie. Ustáli sa teda „akurátna sila". V skutočnosti je to dynamická rovnováha. Koľajnica ani kolesá nie sú úplne homogénne, ani polomer krivosti nie je presne konštantný. Preto dostredivú sila je v krátkych okamihoch trochu menšia „ako by mala byť" a inokedy trochu väčšia. Kolesá nevykresľujú ideálnu trajektóriu s mikrónovou presnosťou.

Príklady dostredivej sily

Pri jazde v zákrute na ceste dostredivú silu zabezpečuje **trenie**.

K problému sa vrátime, až budeme preberať trenie.

Teraz len krátky komentár.

Ľudia na otázku: „Prečo motocyklista vyletel zo zákruty?“ odpovedajú spravidla takto: „Lebo **odstredivá sila** bola priveľká a trenie ju nedokázalo prekonať“.

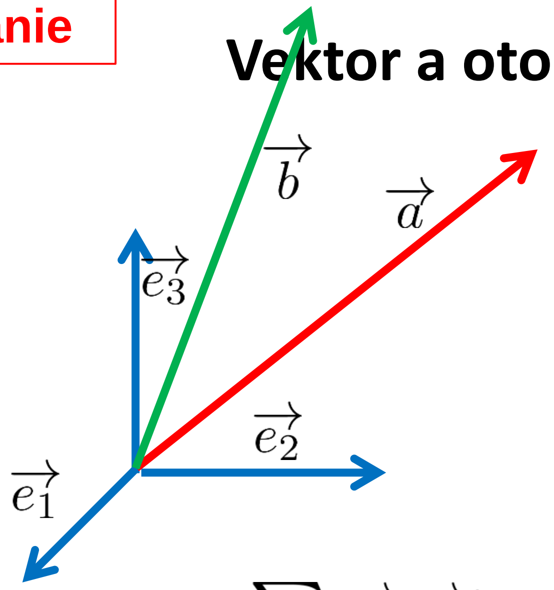
V kontexte toho, čo sme doteraz diskutovali, „správna“ odpoveď znie: „Trenie nebolo dostatočné, aby poskytlo dostatočne veľkú **dostredivú silu**“.

Tá ľudová odpoveď sa dá šikovne interpretovať aj tak, aby sa dala považovať za správnu. Ale interpretácia vyžaduje rozumieť tomu, ako vyzerá zákon sily v neinerciálnych sústavách. O tom až neskôr.

Otočenia a otáčania

Opakovanie

Vektor a otočený vektor v tej istej báze



$$\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e_i} \qquad \vec{b} = \sum_i b_i \vec{e_i}$$

$$b_i = \sum_j (\vec{e_i}.\vec{e_j}')a_j = \sum_j R_{ij}a_j$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$R_{ij} \equiv \vec{e_i}.\vec{e_j}'$$

vektor $\vec{e_j}'$ vznikol z vektora $\vec{e_j}$ rotáciou, ktorou vznikol vektor $\vec{b}$ z vektora $\vec{a}$

Kľúčový pojem na zapamätanie: rotačná matica

Transformácia: otočenie fyzikálneho systému

Najme systém častíc, polohy ktorých v nejakom okamihu sú dané sústavou polohových vektorov

$$\vec{r}_n, \quad n \in (1, N)$$

poznamenajme, že symbol n nie je zložka vektora ale index vektora, teda čísluje jednotlivé častice.

Predstavme si teraz, že celý systém častíc otočíme do nových polôh tak, že každý z polohových vektorov otočíme o rovnaký uhol voči zvolenej (rovnakej osi) otáčania. Po otočení sa častice budú nachádzať v nových (transformovaných) polohách

$$\vec{r}_n \rightarrow \vec{r}_n', \quad n \in (1, N)$$

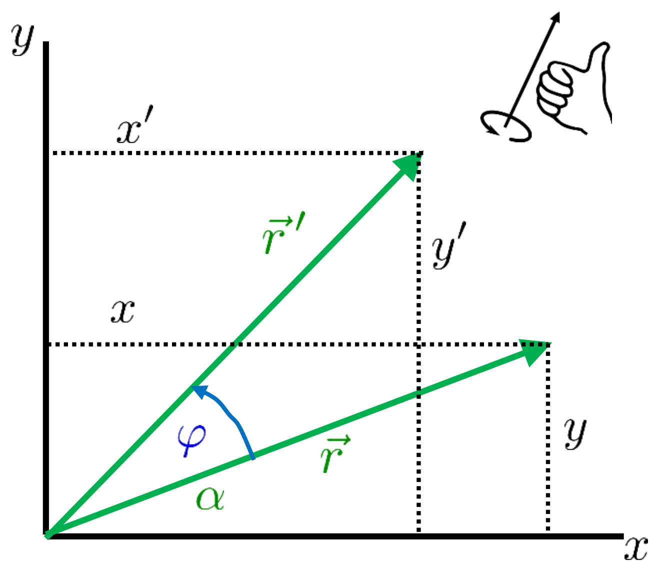
Vykonaná transformácia sa volá „otočenie fyzikálneho systému“. Transformácia otočenia je zadaná rotačnou maticou (spoločnou pre všetky vektory) R_{ij}

$$(\vec{r}_n')_i = \sum_j R_{ij} (\vec{r}_n)_j$$

Ako sme videli, prvky rotačnej matice sú vlastne skalárne súčiny nejakých jednotkových vektorov, teda vlastne kosínusy uhlov, ktoré tie jednotkové vektory zvierajú. Nazývame ich „smerové kosínusy“. Naša intuícia si spravidla nevie predstaviť „ako vyzerá“ otočenie, zadané 9 smerovými kosínusmi. Každé otočenie sa ale dá vyjadriť ako otočenie okolo nejakej fixnej osi o nejaký uhol. To je intuitívne oveľa prijateľnejšie.

Takže pohrajme sa s otočeniami okolo osí.

Začneme otočením okolo osi z. Pri takom otočení sa z-ové súradnice častíc nemenia, menia sa len x-ové a y-ové súradnice, takže je to rovinný problém, na ktorý sa môžeme pozrieť v rovine xy. Sledujme jednu časticu ležiacu v rovine xy na obr.



Os z smeruje od nákresnej roviny smerom „k čitateľovi“, kladný smer otočenia o uhol φ, je daný prstami pravej ruky ak palec ukazuje smer osi z.

$$x = r\cos\alpha \qquad y = r\sin\alpha$$

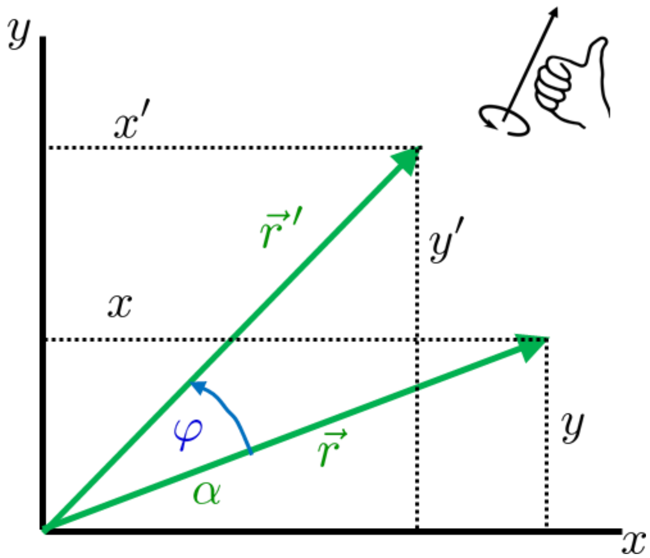
$$x' = r\cos(\alpha+\varphi) \qquad y' = r\sin(\alpha+\varphi)$$

$$x' = r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi$$

$$y' = r\sin\alpha\cos\varphi + r\cos\alpha\sin\varphi$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' &= y\cos\varphi + x\sin\varphi \end{aligned}}$$

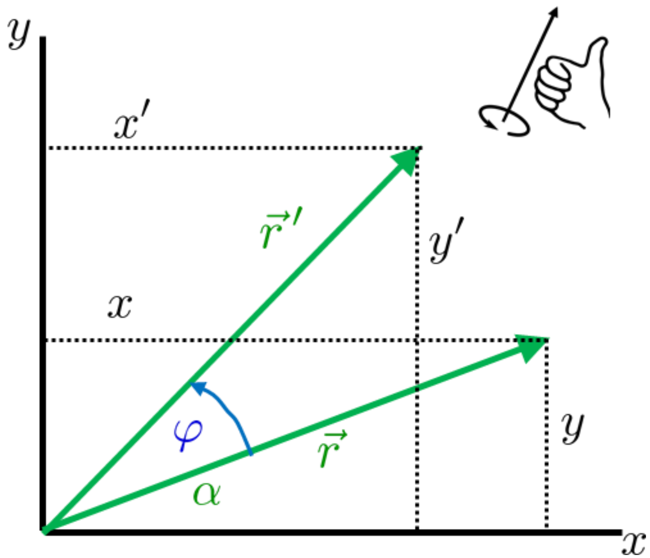
Zapamätajte si, ako vyzerajú vzorce pre rotáciu v dvoch rozmeroch!



$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' &= y\cos\varphi + x\sin\varphi \end{aligned}}$$

Súradnice otočeného vektora sú „zmiešaniny“ súradníc pôvodného vektora. Pomocou kosínusu a sínusu. Pri sínuse je jedno znamienko kladné druhé záporné. Na to, kde je sínus a kde kosínus prídete z úvahy o limite veľmi malého otočenia. Pri malom otočení sa súradnice „moc nezmenia“, takže v limite malého uhla musí byť $x' \approx x, y' \approx y$. Pre malé uhly $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx 0$, taže je to jasné.
To, pri ktorom sínuse je záporné znamienko vidím z obrázku: $x' < x$.

Zapamätajte si, ako vyzerajú vzorce pre rotáciu v dvoch rozmeroch!

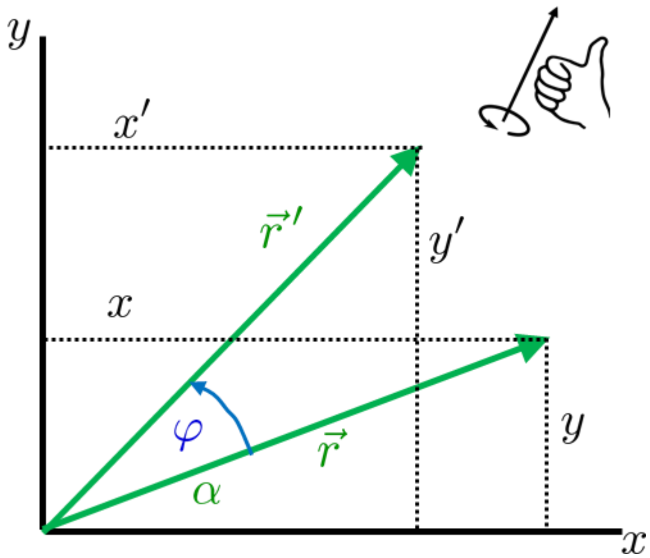


$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' &= y\cos\varphi + x\sin\varphi \end{aligned}}$$

Podumajte, ako sa vyjadria nečiarkované súradnice pomocou čiarkovaných!

Súradnice otočeného vektora sú „zmiešaniny“ súradníc pôvodného vektora. Pomocou kosínusu a sínusu. Pri sínuse je jedno znamienko kladné druhé záporné. Na to, kde je sínus a kde kosínus prídete z úvahy o limite veľmi malého otočenia. Pri malom otočení sa súradnice „moc nezmenia“, takže v limite malého uhla musí byť $x' \approx x, y' \approx y$. Pre malé uhly $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx 0$, taže je to jasné.
To, pri ktorom sínuse je záporné znamienko vidím z obrázku: $x' < x$.

Zapamätajte si, ako vyzerajú vzorce pre rotáciu v dvoch rozmeroch!



$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' &= y\cos\varphi + x\sin\varphi \end{aligned}}$$

Inverzný vzťah vyzerá takto:

$$x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi$$
$$y = y'\cos\varphi - x'\sin\varphi$$

lebo je to vlastne otočenie o $-\varphi$.

Prečo nemôžu byť obe znamienka pri sínusoch rovnaké? Neplatilo by

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

Dĺžka vektora by sa pri otočení zmenila a to sa nesmie. Overte si, že s opačnými znamienkami je to v poriadku!

Ak si to naozaj overíte, zistíte, že dôležitú úlohu okrem znamienok hrá aj vzťah

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

Uvedomte si, že tento vzťah je vlastne Pytagorova veta pre trojuholník s preponou dĺžky 1. Tak preto tam musia byť sínusy a kosínusy. Aby sa otočením nezmršila Pytagorova veta. Keď si všetko predumáte, zistíte, že sa nič nemusíte učiť naspamäť. Vzorec pre otočenie napíšete „z voleja“, lebo mu budete rozumieť!

$$x = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi$$
$$y = y' \cos\varphi - x' \sin\varphi$$

Ešte jeden argument bez počítania, prečo opačné znamienka pri sínusoch. Logika argumentu ide takto:

- pre veľmi malé uhly sa súradnice moc nemôžu zmeniť, len do x sa primieša trošku y a do y trošku x, čo zabezpečí sínus, lebo je malý, takže primieša len trošku
- kosínus je pre malé uhly veľmi blízky k 1, odchýlka je dokonca až druhého rádu

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$$

- sínus je síce malý, ale prvého rádu

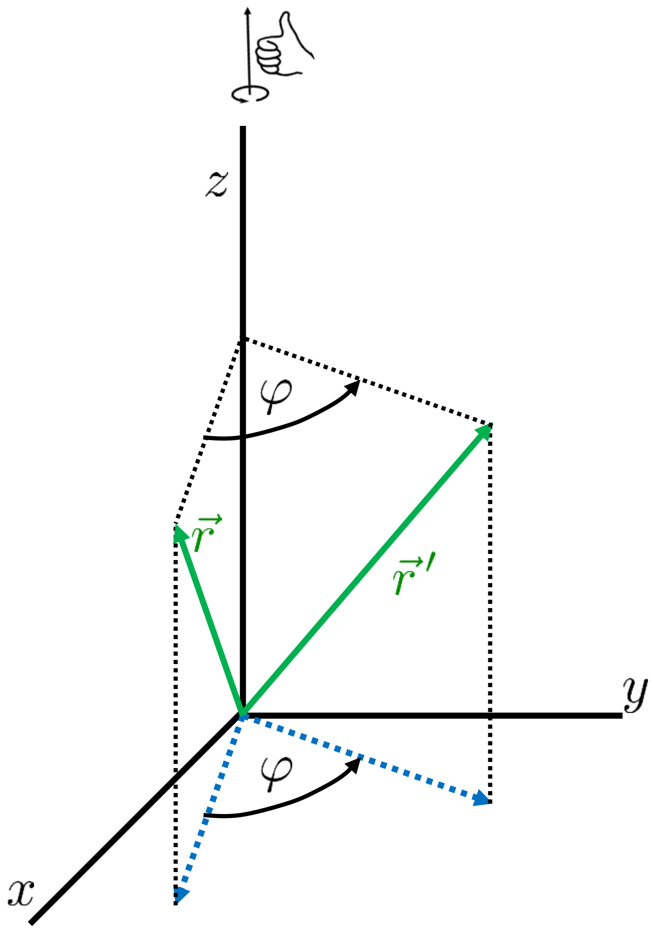
$$\sin\varphi \approx \varphi$$

- keby znamienka pri sínuse boli rovnaké, primiešaniny by mali rovnaké znamienko a otočením by sa zväčšili obe súradnice x aj y. Dĺžka vektora by sa otočením zväčšila. Fakt, že funkcia kosínus súradnice trochu zmenšuje to nezachráni, lebo je to oprava až druhého rádu, kým sínusová primiešanina je prvého rádu. Už vás možno urazím, ale vnímate takmer ako reflex že platí

$\text{ak } |x| < 1 \text{ potom } |x|^2 < |x| \ ?$ Dáte dokopy aj nejaký rýchly argument prečo?

Načo všetky tieto reči na troch slajdoch? Chcem ukázať, že vytrvalým snažením sa dá „porozumieť vzorcu“. Trénujte sa v tom kladením si otázok „prečo?“.

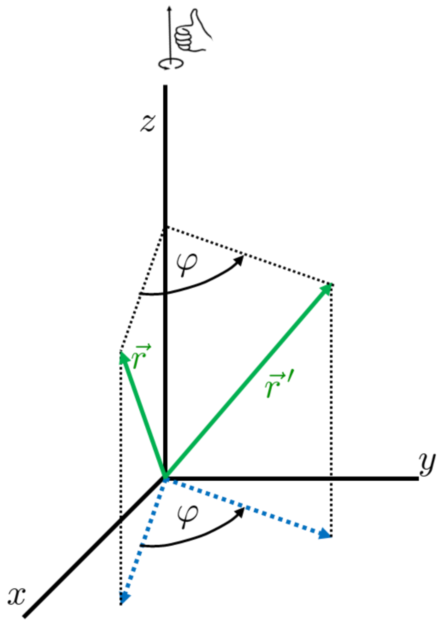
Otočenie okolo osi z, častica neleží v rovine xy



Častica má všeobecnú polohu $\vec{r}$ a pri otočení okolo osi z o uhol φ prejde do polohy $\vec{r}\,'$ (na obr. zelené vektory). Priemety tých vektorov do roviny xy sú znázornené modro. Je zrejmé, že modré vektory sa pri otočení správajú tak, ako keby išlo o časticu, ležiacu v rovine xy, teda to, čo sme doteraz rozvažovali. Súčasne je zrejmé, že priemety zodpovedajúceho si modrého a zeleného vektora na osi x a y sú rovnaké a priemety zelených vektorov na os sa pri popisovanom otočení okolo osi z nemenia. Záver, transformácia súradníc všeobecného polohového vektora pri otočení okolo osi z bude

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$
$$y' = y\cos\varphi + x\sin\varphi$$
$$z' = z$$

Rotačná matica pre otočenie okolo osi z



$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$
$$y' = y\cos\varphi + x\sin\varphi$$
$$z' = z$$

Po nejakých pokusoch a omyloch by sa vám malo podariť napísať, ako vyzerá rotačná matica pre takúto transformáciu. Dostanete

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Overte si maticovým násobením, že je to dobre.

Vo Wikipédii si vygooglite, že rotačné matice pre otočenia okolo osí x, y, z vyzerajú takto (uhol otočenia je označený θ).

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Skladanie otočení okolo tej istej osi

Urobme najprv otočenie okolo osi z o uhol φ a následne ďalšie otočenie zase okolo osi z o uhol ϑ. Takže bude

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$
$$y' = y\cos\varphi + x\sin\varphi$$
$$z' = z$$

$$x'' = x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta$$
$$y'' = y'\cos\vartheta + x'\sin\vartheta$$
$$z'' = z'$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$r'_j = \sum_k R_{jk} r_k$$

$$r''_i = \sum_j \tilde{R}_{ij} r'_j$$

$$r''_i = \sum_j \tilde{R}_{ij} \sum_k R_{jk} r_k = \sum_k R'_{ik} r_k$$

Dve po sebe nasledujúce otočenia, ktorým prislúchajú rotačné matice R a $\tilde{R}$ sa dajú chápať ako jedna (výsledná) rotácia s rotačnou maticou R'

$$R'_{ik} = \sum_j \tilde{R}_{ij} R_{jk}$$

$$R'_{ik} = \sum_j \tilde{R}_{ij} R_{jk}$$

Všimnime si štruktúru výrazu. Na ľavej strane je dvojindexová matica, teda vlastne je to 9 rovníc, každá pre nejakú kombináciu hodnôt indexov ij. V súčte je jeden nemý index, teda je to súčet troch súčinov. V súčinoch sú prvky z dvoch matíc, pričom sa sčíta tak že druhý index (stĺpcový) prvku prvej matice je rovnaký ako prvý index (riadkový) prvku druhej matice. V maticovom zápise je to

$$\begin{pmatrix} R'_{11} & R'_{12} & R'_{13} \\ R'_{21} & R'_{22} & R'_{23} \\ R'_{31} & R'_{32} & R'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{11} & \tilde{R}_{12} & \tilde{R}_{13} \\ \tilde{R}_{21} & \tilde{R}_{22} & \tilde{R}_{23} \\ \tilde{R}_{31} & \tilde{R}_{32} & \tilde{R}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$$

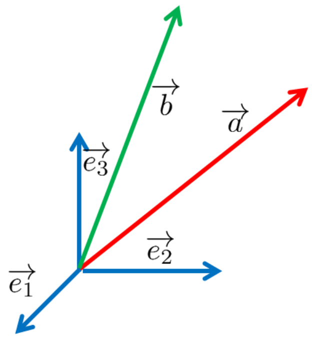
Na obrázku konkrétne vidíme, ako sa vypočíta prvok R'_{23}. Ukazujeme synchrónne ukazovákom ľavej ruky prvky v druhom riadku ľavej matice a ukazovákom pravej ruky prvky v treťom stĺpci pravej matice.

$$R'_{23} = \color{red}{\tilde{R}_{21} R_{13}} + \color{blue}{\tilde{R}_{22} R_{23}} + \color{green}{\tilde{R}_{23} R_{33}}$$

Analogicky získame všetkých 9 prvkov výslednej matice.

Spoľahlivo si nacvičte techniku násobenia dvoch matíc!

Rotácia a inverzná rotácia



$$\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e_i} \qquad \vec{b} = \sum_i b_i \vec{e_i} \qquad b_i = \sum_j (\vec{e_i}.\vec{e_j}')a_j = \sum_j R_{ij} a_j$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad R_{ij} \equiv \vec{e_i}.\vec{e_j}'$$

vektor $\vec{e_j}'$ vznikol z vektora $\vec{e_j}$ rotáciou, ktorou vznikol vektor $\vec{b}$ z vektora $\vec{a}$

Vyrobme inú maticu R^T_{ij} takto $R^T_{ij} \equiv \vec{e_i}'.\vec{e_j}$

Čo je toto za maticu? Stačí trocha porozmýšľať. Je to zjavne rotačná matica, kde naopak nečiarkované vektory vznikli z čiarkovaných nejakou rotáciou. Ide zrejme o inverznú rotáciu k pôvodnej rotácii, ktorou čiarkované vektory vznikli z nečiarkovaných. Keď vykonáme pôvodnú rotáciou a hneď po nej inverznú rotáciu, vrátime sa do pôvodného stavu. Teda zloženiu rotácie a inverznej rotácie zodpovedá výsledná rotácia, „ktorá nič nerobí“. Rotačná matica, ktorá nič nerobí je zjavne matica δ_{ij}, lebo potom $b_i = \sum_j \delta_{ij} a_j = a_i$. Pre zloženie pôvodnej a inverznej rotácie teda platí

$$\delta_{ik} = \sum_j R^T_{ij} R_{jk}$$

Rotácia a inverzná rotácia

Pre lepšiu predstavu zapíšme všetky matice vo vzťahu $\delta_{ik} = \sum_j R^T_{ij} R_{jk}$ v maticovom tvare.

Porovnaním vzťahov $R_{ij} \equiv \overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j}'$ a $R^T_{ij} \equiv \overrightarrow{e_i}'.\overrightarrow{e_j}$ vidno že platí

$$R^T_{ij} = R_{ji}$$

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \qquad R^T = \begin{pmatrix} R^T_{11} & R^T_{12} & R^T_{13} \\ R^T_{21} & R^T_{22} & R^T_{23} \\ R^T_{31} & R^T_{32} & R^T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix}$$

Matica R^T teda zjavne vznikne z matice R jej preklopením okolo uhlopriečky. Taká maticová operácia sa volá transpozícia matice a matica, ktorá tak vznikne sa volá transponovaná matica.

Matica δ vyzerá takto

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Taká matica sa volá jednotková, často sa symbolicky značí takto $\mathbb{I}$. Platí teda

$$R^T.R = \mathbb{I}$$

Zapamätajte si: inverzná matica rotačnej matice je jej transponovaná matica.

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{R} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R' = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi & -(\sin\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\sin\varphi) & 0 \\ \sin\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R' = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta+\varphi) & -\sin(\vartheta+\varphi) & 0 \\ \sin(\vartheta+\varphi) & \cos(\vartheta+\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Výsledkom je rotačná matica zodpovedajúca otočeniu o uhol $\vartheta + \varphi$. To sme, samozrejme, čakali, lebo dve rotácie po sebe o uhly φ a ϑ okolo tej istej osi, je to isté ako jedna rotácia okolo tej osi o uhol $\vartheta + \varphi$.

Keďže sme výsledok vedeli dopredu, môžeme sa na náš postup pozerať ako na šikovný spôsob odvodenia súčtových vzorcov pre goniometrické funkcie.

Čo mám garantovane vedieť

- vyjadrite dráhu častice ako funkciu času ak poznáte závislosť polohového vektora na čase
- zdôvodnite, prečo vektor okamžitej rýchlosti má smer dotyčnice ku trajektórii
- čo je to oskulačná kružnica krivky
- dostredivé zrýchlenie a jeho závislosť na rýchlosti a polomere krivosti
- zadaný je polohový vektor ako funkcia času. Popíšte ako by ste odtiaľ vypočítali normálové zrýchlenie
- ako je definovaná pravotočivá súradnicová sústava
- vyjadrite rotačnú maticu pre otočenie okolo osi z
- mám dve po sebe nasledujúce otočenia vyjadrené dvoma rotačnými maticami. Výsledok je ekvivalentný jedinému otočeniu danému nejakou rotačnou maticou. Ako tú výslednú maticu vypočítate z dvoch pôvodne zadaných.