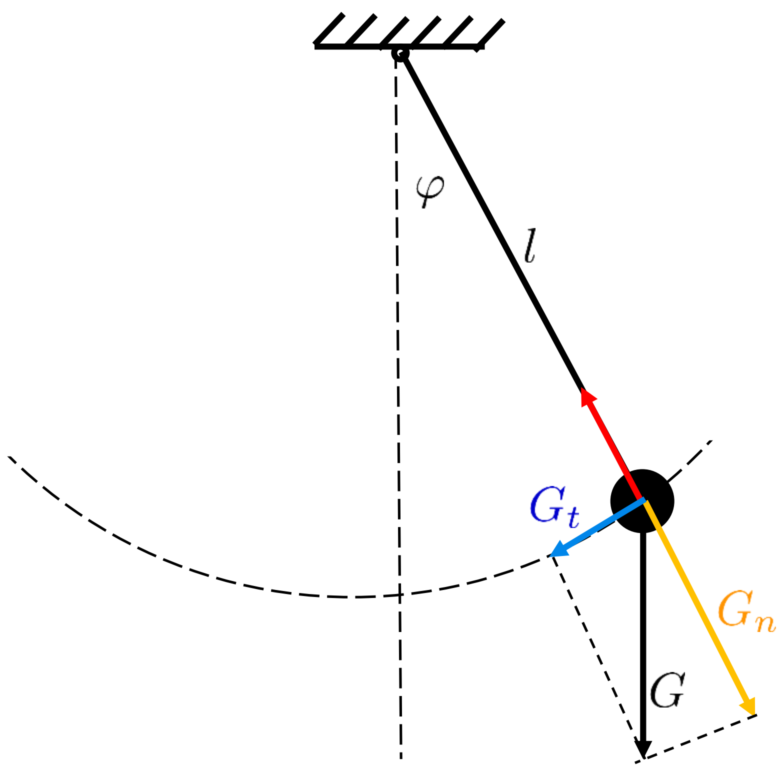
Matematické kyvadlo



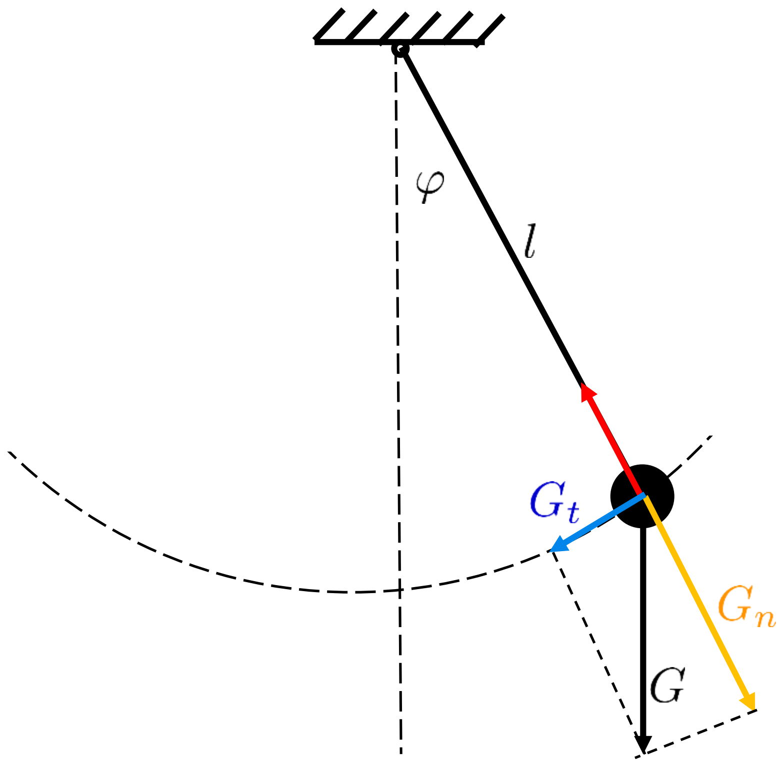
- Hmotný bod na nehmotnom závese dĺžky l (tyčke alebo lanku)
- Trajektóriou je kružnica
- V tangenciálnom smere pôsobí len zložka tiaže o veľkosti $mg\sin(\varphi)$.
- Výchylku hmotného bodu meriame dĺžkou dráhy pozdĺž kružnice
- Dráhu od rovnovážneho bodu doľava chápeme ako kladnú, doprava ako zápornú
- Tangenciálnme zrýchlenie vyjadruje zmenu rýchlosti v dotyčnicovom smere
- pohybová rovnica teda bude

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin(\varphi)$$

- dráhja pozdĺž kružnice sa vyjadruje ako $s = l\varphi$, preto nakoniec dostaneme rovnicu

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{l}g\sin(\varphi)}$$

Matematické kyvadlo



$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{l} g \sin(\varphi)$$

Pre malé uhly platí $\sin(\varphi) \approx \varphi$, takže nakoniec máme

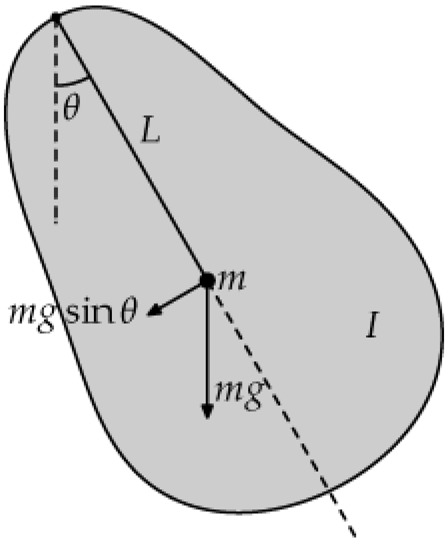
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi$$

Porovnaním s rovnicou harmonického oscilátora

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x = -\omega^2 x$$

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \delta) \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Fyzikálne kyvadlo



Pohybová rovnica tuhého telesa rotujúceho okolo fixnej osi (L je vzdialenosť ťažiska od osi)

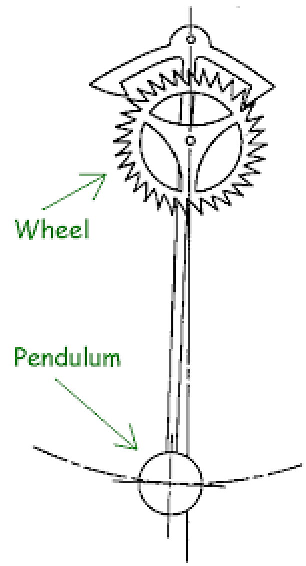
$$I\frac{d}{dt}\omega = N$$

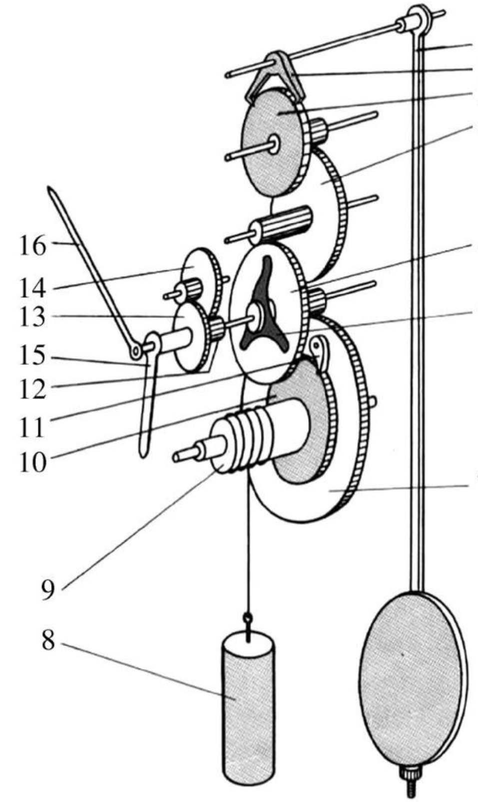
$$I\frac{d^2}{dt^2}\theta = -mgL\sin(\theta) \approx -mgL\theta$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta \approx -\frac{mgL}{I}\theta = -\omega^2\theta$$

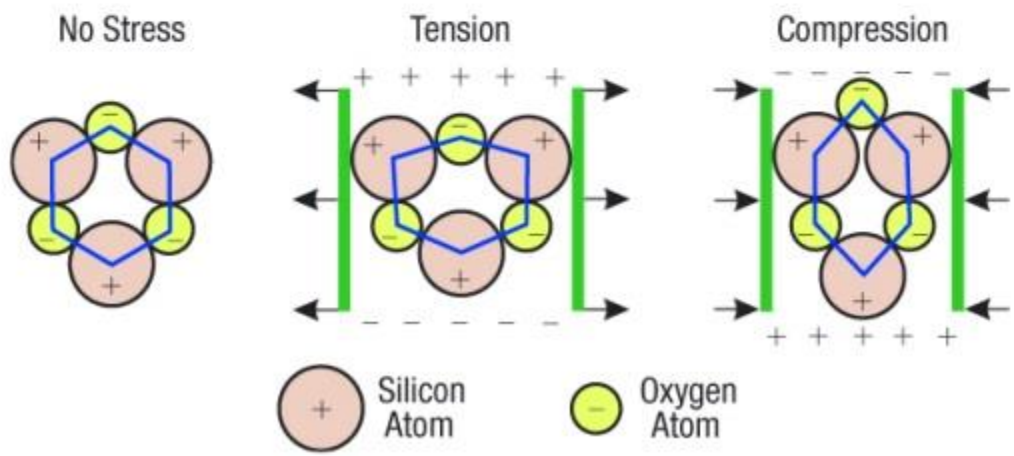
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}}$$

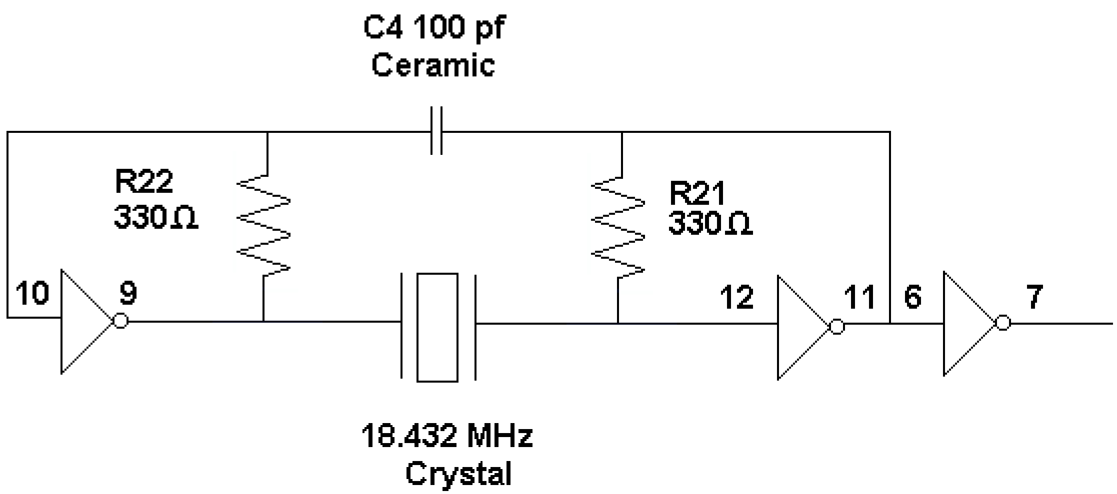

11
12
1
10
2
9
3
8
4
7
6
5


Wheel
Pendulum


1
2
3
4
16
14
13
15
12
11
10
5
6
7
9
8

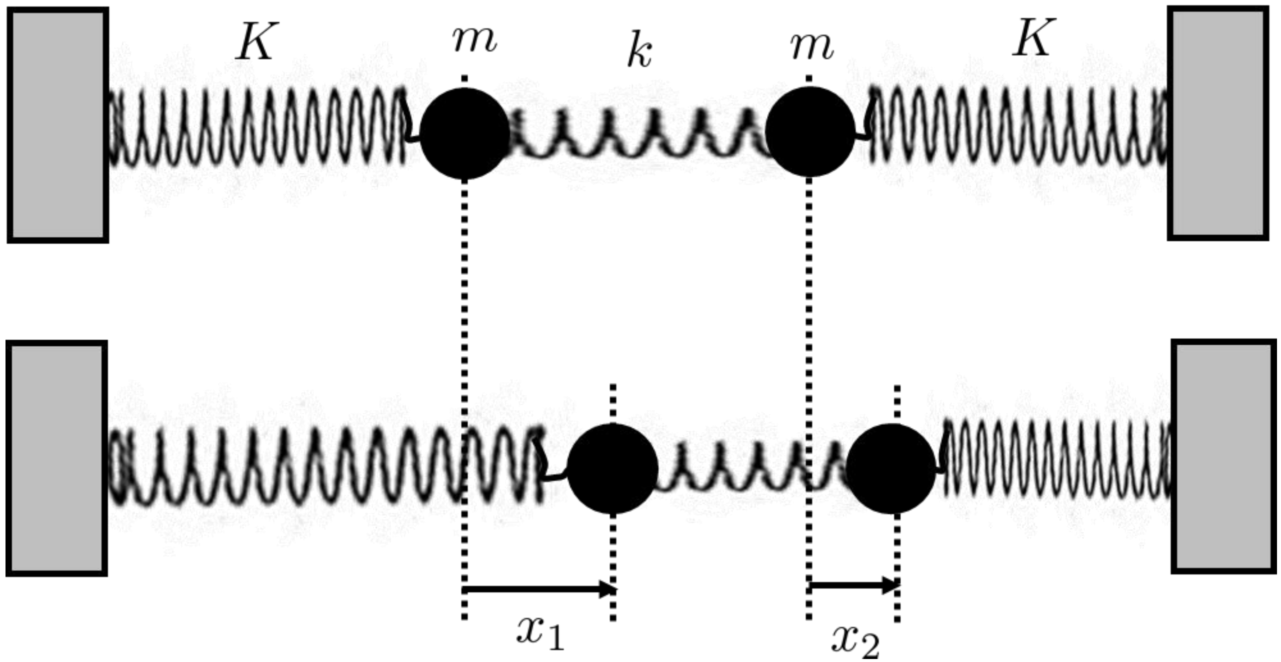
Piezoelectric Effect in Quartz





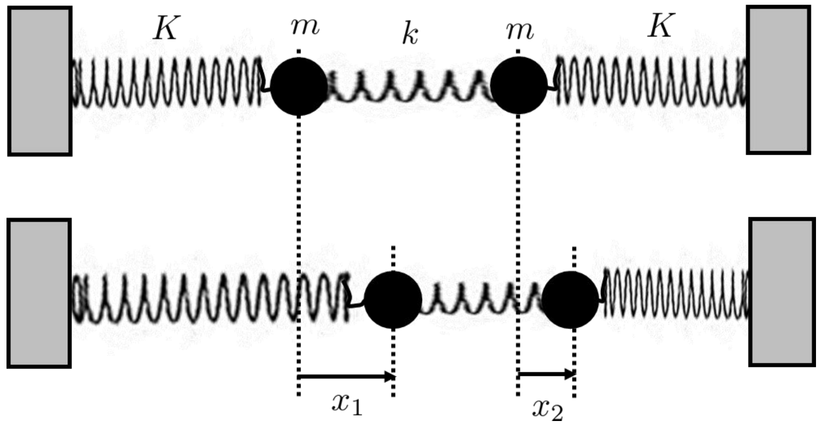
Kmity zložitejších sústav.
Vlny.

Dva viazané oscilátory



Uvažujme dva oscilátory, pre zjednodušenie výpočtov nech majú rovnaké hmotnosti m a rovnaké tuhosti ich vratných pružín K.Oscilátory sú previazané pružinou tuhosti k. Na hornom obrázku sú oscilátory v rovnovážnych polohách, všetky pružiny považujeme za nedeformované. Na spodnom obrázku sú oba oscilátory vychýlené z rovnovážnych polôh. Polohu každého oscilátora určuje súradnica meraná od jeho rovnovážnej polohy.

Dva viazané oscilátory



Pohybové rovnice majú tvar

$$m\ddot{x}_1 = -Kx_1 - k(x_1 - x_2) \qquad m\ddot{x}_2 = -Kx_2 - k(x_2 - x_1)$$

Istý problém pri napísaní tých rovníc môže spôsobiť sila od väzbovej pružiny k. Treba si uvedomiť, že keby výchylky oboch oscilátorov boli rovnaké, pružina k by vôbec nebola deformovaná, preto veľkosť sily, ktorou pružina pôsobí bude úmerná rozdielu $|x_1 - x_2|$. Na každú časticu pôsobí tá pružina silou proti smeru výchylky tej častice. Preto vo výraze pre silu v pohybovej rovnici pre časticu 1 musí výchylka x_1 vystupovať so záporným znamienkom, preto je tam člen $-k(x_1 - x_2)$. A presne opačný člen bude v rovnici pre druhú časticu.

$$m\ddot{x}_1 = -Kx_1 - k(x_1 - x_2) \qquad m\ddot{x}_2 = -Kx_2 - k(x_2 - x_1)$$

Pri riešení tých rovníc použijeme „geniálny trik“, rovnice raz sčítame a raz odčítame a dostaneme iné dve rovnice

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -K(x_1 + x_2)$$

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -(K + 2k)(x_1 - x_2)$$

V tých rovniciach vystupujú hľadané funkcie len v kombináciách $x_1 + x_2$ v prvej rovnici a $x_1 - x_2$ v druhej rovnici. Tie rovnice sú navzájom nezávislé, možno ich riešiť každú samostatne. Zaveďme nové funkcie

$$\xi(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \eta(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

$$m\ddot{\xi} = -K\xi \quad m\ddot{\eta} = -(K + 2k)\eta$$

Dostali sme dve nezávislé rovnice pre akoby dva harmonické oscilátory, všeobecné riešenie má tvar

$$\xi = A\cos\omega_\xi t + B\sin\omega_\xi t \quad \eta = C\cos\omega_\eta t + D\sin\omega_\eta t$$

$$\omega_\xi = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \omega_\eta = \sqrt{\frac{K + 2k}{m}}$$

Odtiaľ už ľahko vyjadríme pôvodné funkcie x_1, x_2.

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(A\cos\omega_\xi t + B\sin\omega_\xi t + C\cos\omega_\eta t + D\sin\omega_\eta t)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}(A\cos\omega_\xi t + B\sin\omega_\xi t - C\cos\omega_\eta t - D\sin\omega_\eta t)$$

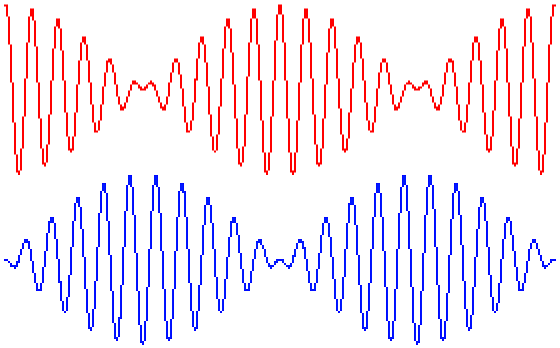
Všeobecné riešenie obsahuje 4 neznáme konštanty A, B, C, D. Určíme ich z počiatočných hodnôt $x_1(0), x_2(0), \dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0)$.

Ako príklad vyšetrime, ako vyzerá riešenie pre prípad, že vychýlime jeden oscilátor, druhý ostane v rovnovážnej polohe

$$x_1(0) = X, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$$

Riešením je zjavne $A = C = X, B = D = 0$ a dostaneme

$$x_1(t) = X\cos\left(\frac{\omega_\xi + \omega_\eta}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_\xi - \omega_\eta}{2}t\right)$$
$$x_2(t) = -X\sin\left(\frac{\omega_\xi + \omega_\eta}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_\xi - \omega_\eta}{2}t\right)$$



Typický priebeh kmitov je na obrázku. Oscilátory kmitajú „na striedačku“