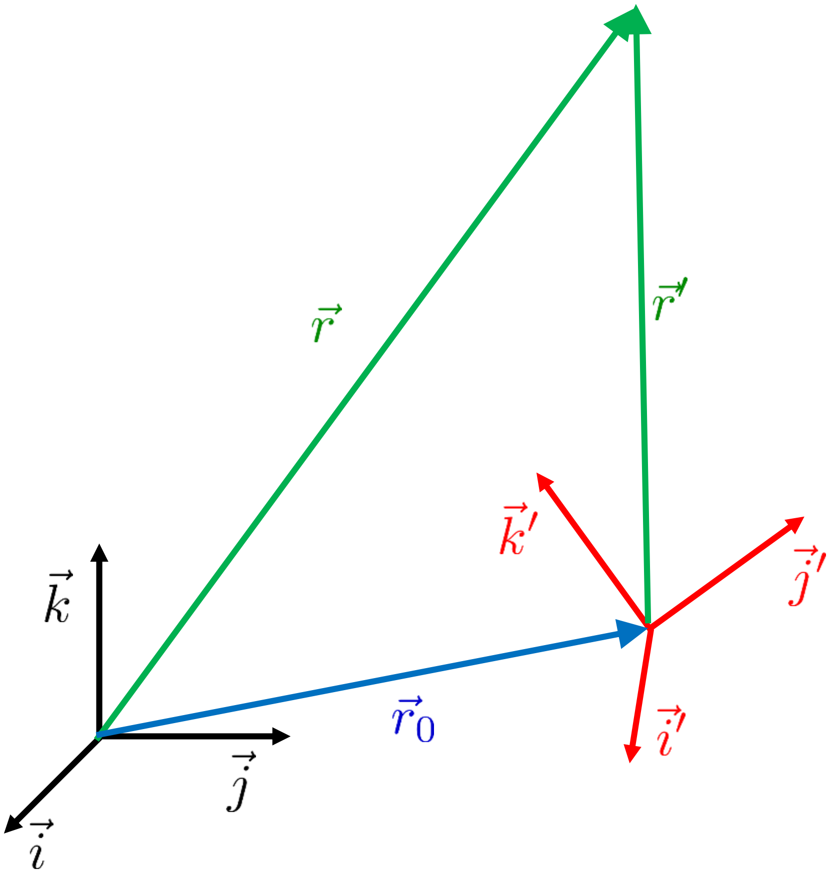
Neinerciálne sústavy



Sústava $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ je inerciálna, sústava $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$ je neinerciálna. Uvažujme hmotný bod. Jeho polohový vektor voči inerciálnej sústave je $\vec{r}$, voči neinerciálnej sústave $\vec{r}'$. Polohový vektor počiatku neinerciálnej sústavy voči inerciálnej je $\vec{r}_0$.

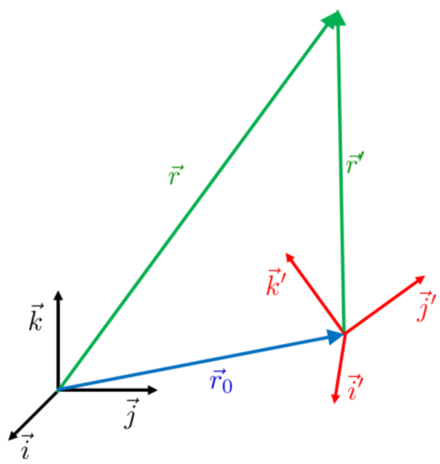
Neinerciálna sústava je ako tuhé teleso, jeho stav (voči inerciálnej sústave je v každom okamihu zadateľný ako

$$\vec{r}_0(t), \vec{v}_0(t), R_{ij}(t), \vec{\omega}(t)$$

Keď sme bez ujmy na všeobecnosti považovali počiatok neinerciálnej sústavy za jej ťažisko. Platí teda, že $\vec{\omega}$ je uhlová rýchlosť pohybu neinerciálnej sústavy a

$$\vec{v}_0 = \frac{d}{dt}\vec{r}_0$$

Neinerciálne sústavy



Vybudujeme prekladový slovník. Poloha bodu voči neinerciálnej sústave sa vyjadruje takto

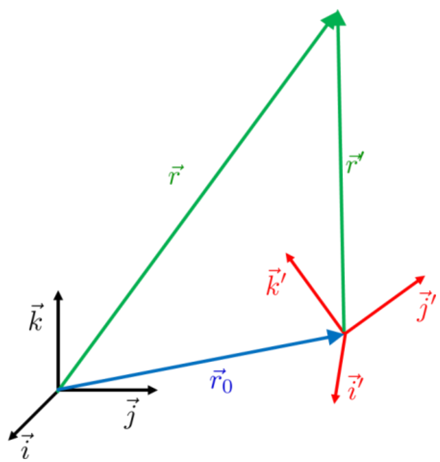
$$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

Treba si uvedomiť, že v pojme vektora samotného nie je nikde skryté, voči akej súradnicovej sústave chceme popisovať jeho zložky. Teda keď poviem vektor $\vec{r}'$, môžem ho v istom okamihu rovnako dobre používať aj v inerciálnej sústave, kde platí

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t) = \vec{r}_0(t) + x'(t)\vec{i}'(t) + y'(t)\vec{j}'(t) + z'(t)\vec{k}'(t)$$

Musím si ale uvedomiť, že časová závislosť „toho istého“ vektora voči dvom súradnicovým sústavám môže byť iná. Vektor $\vec{i}'$ je z hľadiska neinerciálnej sústavy konštantný vektor nezávislý na čase, kým z hľadiska inerciálnej sústavy to nie je konštantný vektor, lebo neinerciálna sústava môže rotovať, a teda smer vektora $\vec{i}'$ voči inerciálnej sústave sa môže meniť.

Neinerciálne sústavy



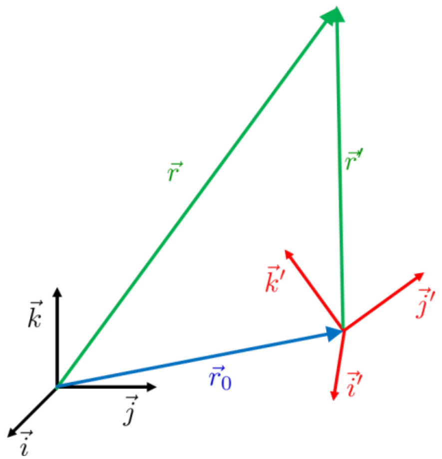
Uvedomte si dobre túto vec.

Keby neinerciálna ústava voči inerciálnej nerotovala, iba sa pohybovala postupným ohybom (posúvala sa), potom vektor $\vec{\imath}'$ by aj hľadiska inerciálnej sústavy bol konštantný vektor.

Nech vás nepomýli to, že „pôsobisko vektora“ sa posúva. Pôsobisko nie je súčasť vektora.

Pripomeňte si, že síce skrátene hovoríme, že poloha častice je daná polohovým vektorom, ale to nie je „celá pravda“. Poloha častice je daná počiatkom súradnicovej sústavy **a** polohovým vektorom. Takže napríklad ak častica stojí voči neinerciálnej sústave, potom jej polohový vektor $\vec{r}'$ je konštantný v absolútnom zmysle (teda aj voči inerciálnej aj voči neinerciálnej sústave). Fakt že častica sa hýbe voči inerciálnej sústave sa prejaví tým, že vektor $\vec{r}_0$ nie je konštantný

Neinerciálne sústavy



Máme teda

$$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t) = \vec{r}_0(t) + x'(t)\vec{i}'(t) + y'(t)\vec{j}'(t) + z'(t)\vec{k}'(t)$$

Vypočítajme vektor rýchlosti voči inerciálnej sústave

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}_0(t) + \frac{d}{dt}\vec{r}'(t) =$$

$$= \vec{v}_0(t) + \left(\frac{d}{dt}x'(t)\right)\vec{i}'(t) + x'(t)\frac{d}{dt}\vec{i}'(t)$$

$$+ \left(\frac{d}{dt}y'(t)\right)\vec{j}'(t) + y'(t)\frac{d}{dt}\vec{j}'(t) + \left(\frac{d}{dt}z'(t)\right)\vec{k}'(t) + z'(t)\frac{d}{dt}\vec{k}'(t)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0(t) +$$

$$+ \left(\frac{d}{dt}x'(t)\right)\vec{i}'(t) + \left(\frac{d}{dt}y'(t)\right)\vec{j}'(t) + \left(\frac{d}{dt}z'(t)\right)\vec{k}'(t) +$$

$$+ x'(t)\frac{d}{dt}\vec{i}'(t) + y'(t)\frac{d}{dt}\vec{j}'(t) + z'(t)\frac{d}{dt}\vec{k}'(t)$$

Neinerciálne sústavy

$$
\begin{aligned}
\vec{v}(t) = \vec{v}_0(t) &+ \\
&+ \boxed{\left(\frac{d}{dt}x'(t)\right)\vec{i}'(t) + \left(\frac{d}{dt}y'(t)\right)\vec{j}'(t) + \left(\frac{d}{dt}z'(t)\right)\vec{k}'(t)} + \\
&+ \boxed{x'(t)\frac{d}{dt}\vec{i}'(t) + y'(t)\frac{d}{dt}\vec{j}'(t) + z'(t)\frac{d}{dt}\vec{k}'(t)} = \\
&= \vec{v}_0(t) + \boxed{\vec{v}'(t)} + \boxed{\omega(t) \times \vec{r}'}
\end{aligned}
$$

Výraz v zelenom rámiku je zjavne rýchlosť častice ako ju vidí pozorovateľ z neinerciálnej sústavy. Výraz v modrom rámiku sme upravili takto: Jednotkový vektor $\vec{i}'$ nemení svoju dĺžku ale mení svoj smer voči inerciálnej sústave, ak neinerciálna sústava rotuje voči inerciálnej, preto

$$
\frac{d}{dt}\vec{i}' = \omega \times \vec{i}'
$$

a podobne to platí i pre ostatné vektory neinerciálnej bázy. Preto

$$
\begin{aligned}
&\boxed{x'(t)\frac{d}{dt}\vec{i}'(t) + y'(t)\frac{d}{dt}\vec{j}'(t) + z'(t)\frac{d}{dt}\vec{k}'(t)} = x'(t)\vec{\omega} \times \vec{i}' + y'(t)\vec{\omega} \times \vec{j}' + z'(t)\vec{\omega} \times \vec{k}' = \\
&= \vec{\omega} \times \left(x'(t)\vec{i}' + y'(t)\vec{j}' + z'(t)\vec{k}'\right) = \boxed{\vec{\omega} \times \vec{r}'}
\end{aligned}
$$

Neinerciálne sústavy

Odvodili sme vlastne, že ak derivujeme podľa času voči inerciálnej sústave nejaký vektor $\vec{r}\,'$, potom dostaneme

$$\frac{d}{dt}\vec{r}\,' = \vec{v}' + \omega \times \vec{r}\,'$$

kde $\vec{v}'$ je časová derivácia vektora $\vec{r}\,'$ tak, ako ju vidí pozorovateľ v neinerciálnej sústave. Pri odvodení sme nijako nevyužili, že ide o polohový vektor, takže rovnaký vzťah platí pre časové derivácie ľubovoľného vektora. Dostali sme teda

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \vec{v}(t) = \vec{v}_0(t) + \vec{v}'(t) + \omega(t) \times \vec{r}\,'$$

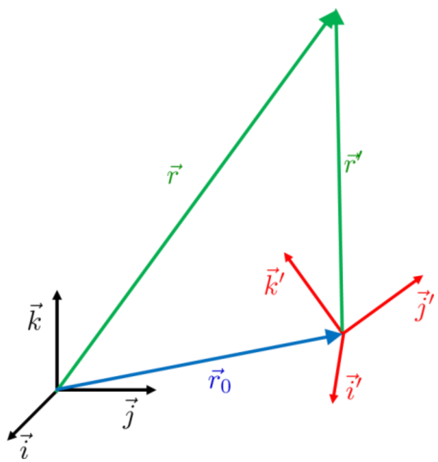
A ďalším derivovaním voči inerciálnej sústave dostaneme

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \vec{a}(t) = \vec{a}_0(t) + \vec{a}'(t) + \vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}(t)\right) \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \vec{a}_0(t) + \vec{a}'(t) + 2\,\vec{\omega}(t) \times \vec{v}\,'(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}\,') + \left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}(t)\right) \times \vec{r}\,'}$$

Neinerciálne sústavy

$$\boxed{\vec{a}(t) = \vec{a}_0(t) + \vec{a}'(t) + 2\,\vec{\omega}(t) \times \vec{v}\,'(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}\,') + \left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}(t)\right) \times \vec{r}\,'}$$



Odvodená rovnica predstavuje hľadaný „prekladový slovník“ medzi veličinami vyjadrenými v inerciálnej a neinerciálnej sústave.

Pozorovateľ v inerciálnej sústave napíše Newtonov zákon takto

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$$

Pozorovateľ v neinerciálnej sústave si povie, ja síce „nesmiem“ písať Newtonov zákon, lebo sedím v neinerciálnej sústave. Ale čo keby som napísal rovnicu

$$\vec{a}_0(t) + \vec{a}'(t) + 2\,\vec{\omega}(t) \times \vec{v}\,'(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}\,') + \left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}(t)\right) \times \vec{r}\,' = \frac{1}{m}\vec{F}$$

a prepísal ju takto

$$\vec{a}'(t) = \frac{1}{m}\vec{F} - \vec{a}_0(t) - 2\,\vec{\omega}(t) \times \vec{v}\,'(t) - \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}\,') - \left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}(t)\right) \times \vec{r}\,'$$

Neinerciálne sústavy

$$\vec{a}'(t) = \frac{1}{m}\left(\vec{F} - m\vec{a}_0(t) - 2m\,\vec{\omega}(t)\times\vec{v}\,'(t) - m\vec{\omega}(t)\times(\vec{\omega}(t)\times\vec{r}\,') - m\left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}(t)\right)\times\vec{r}\,'\right)$$

Pozorovateľ v neinerciálnej sústave sa nad touto rovnicou zamyslí a povie si:
Veď ja vlastne môžem robiť fyziku v neinerciálnej sústave, len Newtonov zákon sily bude mať u mňa iný tvar. Urobím to takto:

- zmeriam si zrýchlenie počiatku mojej neinerciálnej sústavy $\vec{a}_0$ voči inerciálnej
- zmeriam uhlovú rýchlosť rotácie $\vec{\omega}(t)$ mojej sústavy voči inerciálnej
- vypočítam aj uhlové zrýchlenie $\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt}$
- potom si poviem, že v mojej neinerciálnej sústave okrem naozajstnej sily $\vec{F}$ pôsobia ešte ďalšie mystické zotrvačné sily neznámeho pôvodu, a to

zotrvačná sila postupného zrýchlenia:	$-m\vec{a}_0(t)$
Coriolisova sila:	$-2m\,\vec{\omega}(t)\times\vec{v}\,'(t)$
odstredivá sila:	$-m\vec{\omega}(t)\times(\vec{\omega}(t)\times\vec{r}\,')$
zotrvačná sila rotačného zrýchlenia:	$-m\left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}(t)\right)\times\vec{r}\,'$

- **a napíšem akoby Newtonovu rovnicu s pridaním zotrvačných síl**

Neinerciálne sústavy, zotrvačná sila postupného rýchlenia

$$-m\vec{a}_0(t)$$

Toto je fiktívna sila, ktorú „cíti“ šofér, keď akceleruje: čosi neznámeho mu tlačí chrbát do operadla sedadla. Ak auto zrýchľuje dopredu, znamienko mínus vo vzorci spôsobí že fiktívna zotrvačná sila nás tlačí dosazu. Ale prečo je to fiktívna sila, keď ju všetci „cítime“?

Problém je zrejme v tom, že naše pocity sa nám vyvinuli prevažne v situáciách, keď sa sme sa nachádzali v inerciálnej sústave. Ak sedíme doma za stolom a naraz by sme na chrbte cítili, že tlačíme do operadla stoličky, hľadali by sme vonkajšieho aktívneho činiteľa. Lebo nemáme takú skúsenosť, že stolička sa zrazu zblázni a začne nám tlačiť do chrbta, čo by vyvolalo reakciu chrbta, ktorý by začal tlačiť do stoličky.

V neinerciálnom aute je to ale práve tak. Auto začne zrýchľovať, a naše telo, ak má ostať nehybné voči autu musí začať zrýchľovať tiež. Ale nemôže samo od seba, sedadlo auta, ktoré akoby chcelo pod nami podkĺznuť dopredu začne tlačiť na chrbát dopredu, aby nás zrýchlilo v smere zrýchlenia auta. Sedadlo sa „zbláznilo“. Nijaký škriatok nás netlačí dozadu.

Neinerciálne sústavy, odstredivá sila

$$-m\vec{\omega}(t)\times(\vec{\omega}(t)\times\vec{r}\,')$$

Toto je možno ľudovo najznámejšia zotrvačná sila. Sedím v električka a zrazu ma čosi natlačí na pravé okno. Hovorí sa: „odstredivá sila ma pritlačila na okno“. Na príčine ale nie je žiaden škriatok, ktorý by ma tlačil doprava. Z hľadiska inerciálnej sústavy je to jasné: električka vošla do ľavotočivej zákruty a núti ma aby som nepokračoval cez pravé okno v svojom pôvodnom rovnom smere. Núti ma vykrúžiť zákrutu. Na to je potrebná dostredivá sila, ktorú urobí to okno. Okno sa „zbláznilo“.

Overte si všakovým krútením pravej ruky, že odstredivá sila má smer sprievodiča a smeruje „von zo zákruty“. Najlepšie je predstaviť si, že sedím na kolotoči

Odstredivá sila natlačí dievčatku chrbát do vonkajšej obruče kolotoča. Overte si to pravidlami pravej ruky!

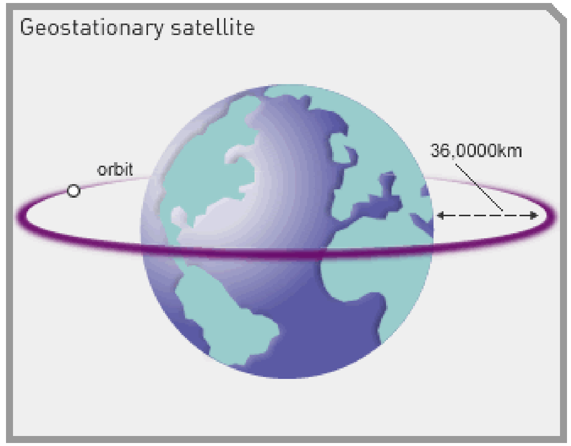
Neinerciálne sústavy, odstredivá sila

Odstredivá sila vychýli sedačky zo zvislej polohy smerom von.

Neinerciálne sústavy, odstredivá sila

Odstredivá sila pritlačí prádlo na stenu dierkovaného bubna a vyžmýka ho.

Neinerciálne sústavy, odstredivá sila



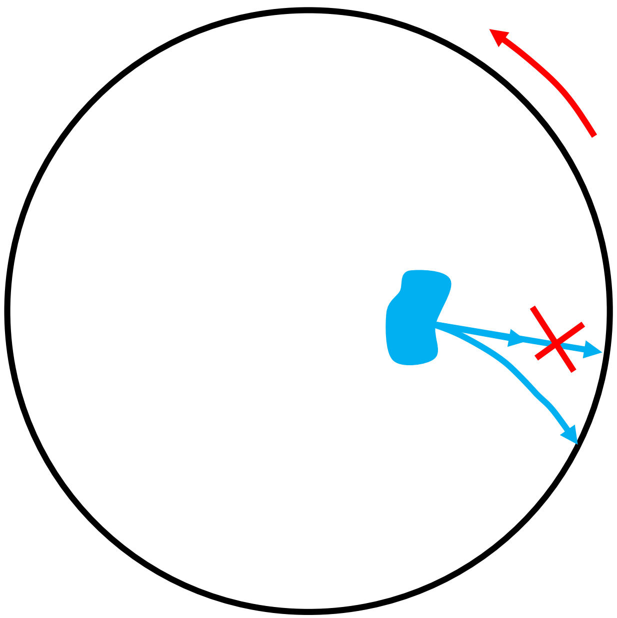
Geostacionárna družica lieta nad rovníkom vo výške 36000 km, kde kozmická rýchlosť je taká, že jedna otočka trvá 24hodín, teda presne tak, ako rotuje Zem. Z pohľadu pozorovateľa na Zemi mu družica stojí nad hlavou. Prečo nespadne, keď stojí? Z hľadiska fyziky v neinerciálnej rotujúcej sústave je vysvetlenie triviálne: odstredivá sila je rovnako veľká ale opačná ako tiaž, takže družica stojí.

Všimnite si, že všetky vysvetlenia z hľadiska neinerciálnej sústavy boli jednoduchšie ako z hľadiska inerciálnej sústavy, ak veríme na škriatkov, ktorí na nás pôsobia „skutočnými“ zotrvačnými silami. Preto ľudia majú radi odstredivú silu, lebo „rozumejú“ prečo družica nespadne. Neverte na škriatkov. Porozumejte odvodeniu fiktívnych zotrvačných síl! A potom si „v srdci“ argumentáciu uľahčite hoci aj s pomocou škriatkov. Ale zvládnite aj „správnejšiu“ argumentáciu z hľadiska inerciálnej sústavy!

Neinerciálne sústavy, Coriolisova sila

$$-\,2m\,\vec{\omega}(t)\times\vec{v}\,'(t)$$

Toto je „medzi ľudom“ takmer neznáma zotrvačná sila.



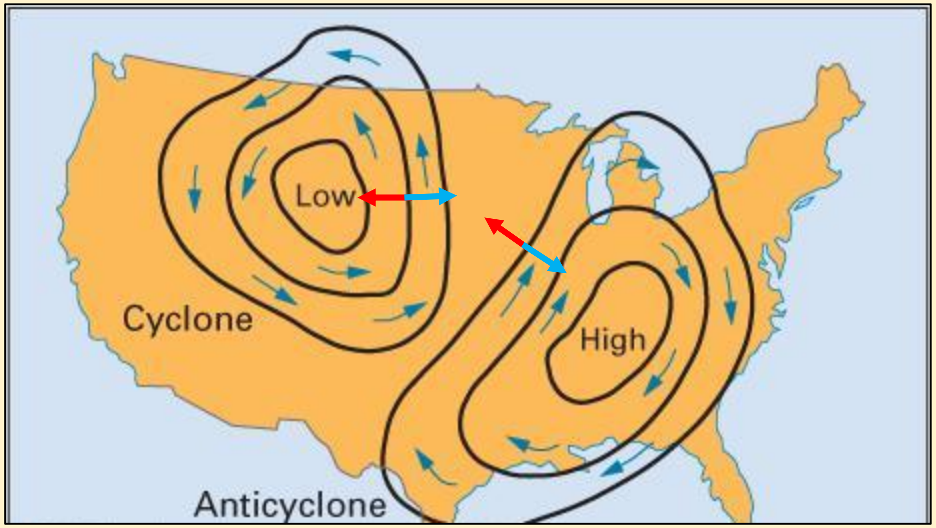
Predstavme si, že sme na kolotoči a vyliala sa nám voda niekde medzi stredom a okrajom kolotoča. Súc poučení diskusiou o odstredivej sile, pomyslíme si, že voda z mláčky bude hnaná odstredivou silou k okraju kolotoča a vytvorí stružku pozdĺž polomeru. Ale nebude to pravda!
Problém je v tom, že (videné z hľadiska inerciálnej sústavy) voda v mláčke má obvodovú rýchlosť menšiu ako obvodová rýchlosť na okraji kolotoča. Preto kolotoč bude pod stružkou utekať a stružka bude zahýbať doprava!

To isté videné z hľadiska pozorovateľa sediaceho na kolotoči vyzerá takto: okrem odstredivej sily pôsobí aj Coriolisova sila a tá (overte si to pravidlom pravej ruky) je kolmá na rýchlosť tečenia vody v stružke a smeruje doprava.

Neinerciálne sústavy, Coriolisova sila

Dva často uvádzné príklady na vplyv Coriolisovej sily na Zemi:

- rieky na severnej pologuli vymieľajú pravý breh viac ako ľavý, lebo Coriolisova sila ich tlačí doprava (overte pravidlom pravej ruky: uhlová rýchlosť Zeme má smer zemskej osi a smeruje von zo severného pólu).
- vzduch neprúdi po priamke z miest vysokého tlaku na miesta nízkeho tlaku. Problém je dosť zložitý, ide o viac-menej ustálené prúdenie, pri ktorom sa dve sily gradient tlaku a Coriolisova sila viac-menej vyrovnávajú, takže okolo miesta vysokého tlaku vzniká cyklóna a okolo miesta nízkeho tlaku anticyklóna. Na obrázku je gradient tlaku červeno a Coriolisova sila modro.



Neinerciálne sústavy, Coriolisova sila

Jedna historická kuriozita v súvislosti s Coriolisovou silou.

Voľakedy odporcovia rotácie Zeme namietali, že zem určite nerotuje, lebo keď vyskočím, dopadnem na to isté miesto. Keby Zem rotoval, tak kým som vo vzduchu Zem by podo mnou ušla. Argument nebol hlúpy, ibaže bol založený na Aristotelvskej mechanike, ktorá nepoznala zotrvačnosť pohybu.
Zotrvačnosť si prvý uvedomil Galilei, keď si všimol, že ak námorníkovi vylezenému na sťažni plachetnice niečo vypadne z rúk na idúcej lodi, dopadne to k päte sťažňa a loď teda počas pádu „neujde“. Preto aj kameň hodený z veže padá kolmo dolu a nedá sa to použiť ako argument proti rotácii Zeme.

V skutočnosti kameň nepadá celkom kolmo dolu, pretože hore na veži je väčšia obvodová rýchlosť rotácie Zeme a zotrvačnosťou si ju podrží, kým ju odpor vzduchu nezlikviduje, ale celkom kolmo dolu nedopadne. Tak to vidí inerciálny pozorovateľ. Neinerciálny pozorovateľ všetko pripáše Coriolisovej sile. Takže padajúcim kameňom sa naopak dá dokázať rotácia Zeme. Smer odchýlky od kolmice je ale opačný, než argumentovali popierači rotácie Zeme. Odchýlka je ale malá, Galileo o nej nevedel.

Neinerciálne sústavy, zotrvačná sila rotačného zrýchlenia

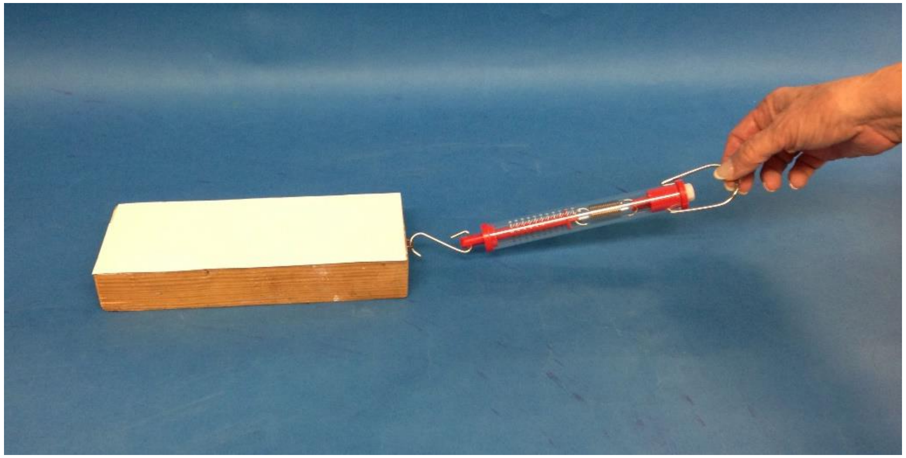
$$- m\left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}(t)\right) \times \vec{r}'$$

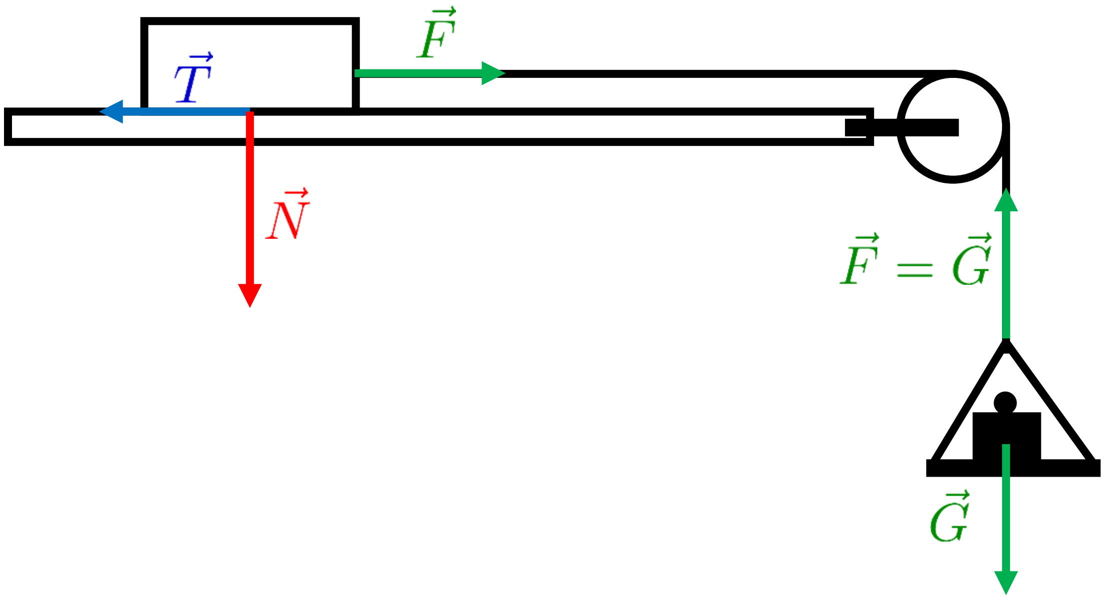
Túto silu pocítim, keď sedím na kolotoči obrátený do „smeru jazdy“ a kolotoč začne zrýchľovať otáčky. Je to veľmi podobné ako zotrvačná sila postupného pohybu v akcelerujúcom aute.

Čo mám garantovane vedieť

- vyjadriť časovú deriváciu jednotkového vektora pri rotácii
- vyjadriť zotrvačnú silu od postupného zrýchlenia neinerciálnej sústavy
- vyjadriť Coriolisovu silu
- vyjadriť odstredivú silu

Trenie (šmykové)





Teleso stojí napriek ťažnej sile $\vec{F}$.
Kolmá tlaková sila $\vec{F}$
Trenie $\vec{T}$

Ak teleso stojí, celková sila naň pôsobiaca je nulová

$$|\vec{T}| = |\vec{F}|$$

Trenie „akurát" vyrovná ťažnú silu

Ale trenie nie je schopné vyrovnať akokoľvek veľkú ťažnú silu, pri istej kritickej veľkosti sa teleso dá do pohybu

$$\boxed{|\vec{T}_{krit}| = |\vec{F}_{krit}| = f|\vec{N}|}$$

f je koeficient (statického) trenia

Trenie (šmykové)

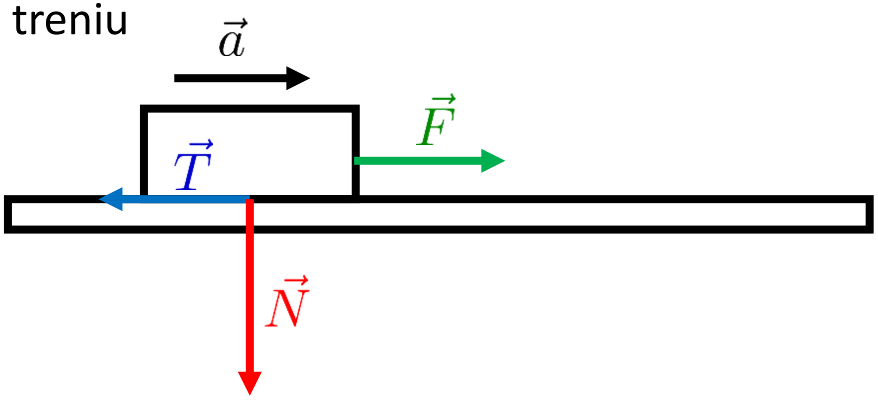
Ak teleso stojí, celková sila naň pôsobiaca je nulová Trenie „akurát“ vyrovná ťažnú silu

$$|\vec{T}| = |\vec{F}|$$

Statické trenie je menšie ako jeho maximálna kritická hodnota

$$\boxed{|\vec{T}| \leq f|\vec{N}| = |\vec{T}_{krit}|}$$

Ak už sa teleso hýbe (šmýka po podložke), trecia sila je v podstate rovná kritickému treniu



$$\vec{a} = \frac{1}{m}(\vec{F} - f_d\vec{N})$$

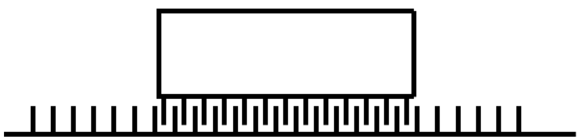
f_d je koeficient dynamického trenia

Dynamické trenie je spravidla menšie než kritické statické trenie, teda ťažná sila, ktorá je schopná uviesť teleso do pohybu je väčšia ako sila, ktorá je potom schopná udržiavať teleso v rovnomernom priamočiarom pohybe ($f_d < f$).

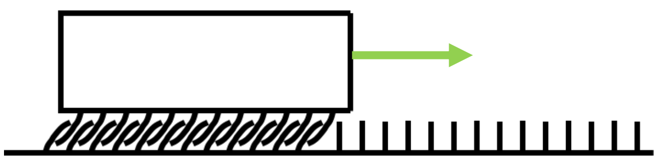
Ako podložka „vie“ akú veľkú treciu silu má akurát vyvinúť? Už sme takéto niečo diskutovali pri skúmaní pohybu tuhého telesa.

Tu je primitívny (a nereálny) mechanický model trenia

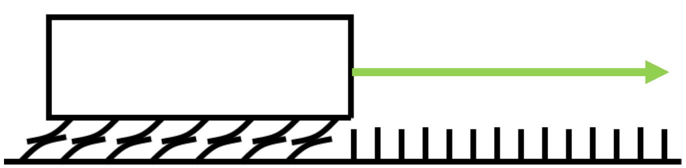
Trenie je modelované pružnými jazýčkami, sila potrebná na ich ohnutie je úmerná požadovanému ohnutiu.



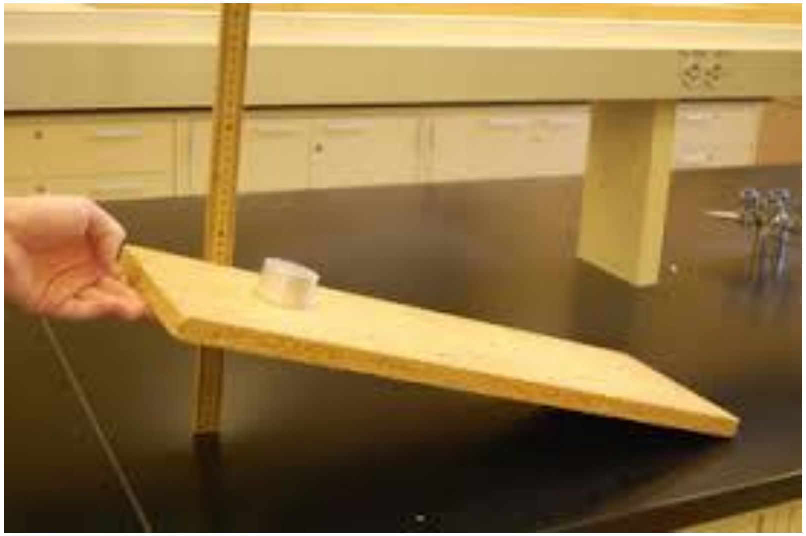
Pri nulovej ťažnej sile sa jazýčky neohýbajú, trenie je nulové



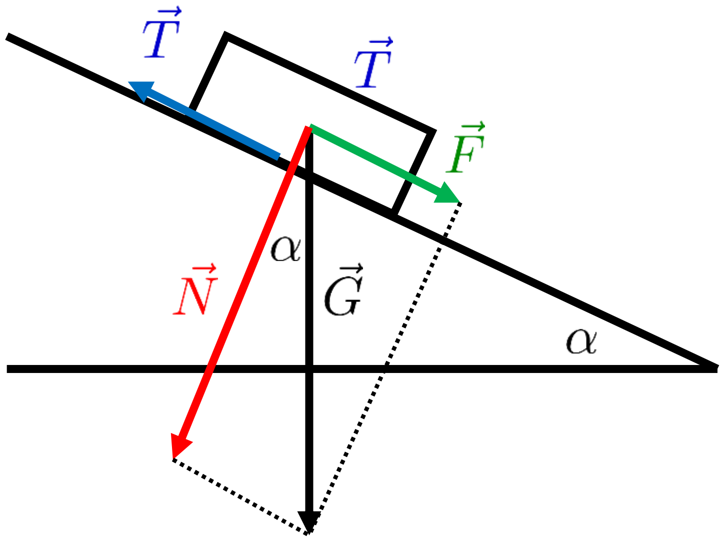
Ťažná sila chce uviesť teleso do pohybu, ale „nevládze“. Vyvolé ohnutie jazýčkov, ktoré je práve také veľké, že zodpovedá ťažnej sile a teda anuluje je pohybový účinok



Pri dostatočne veľkej sile sa jazýčky ohnú natoľko, že už nevedia zabrániť pohybu.

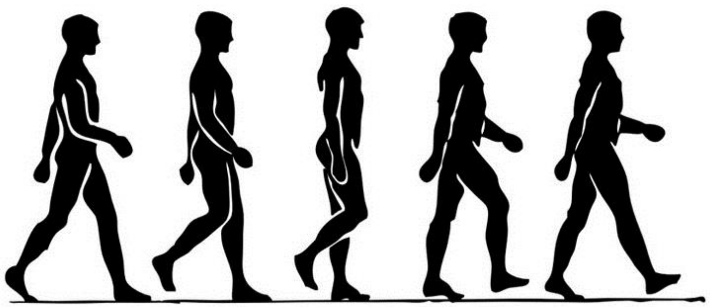


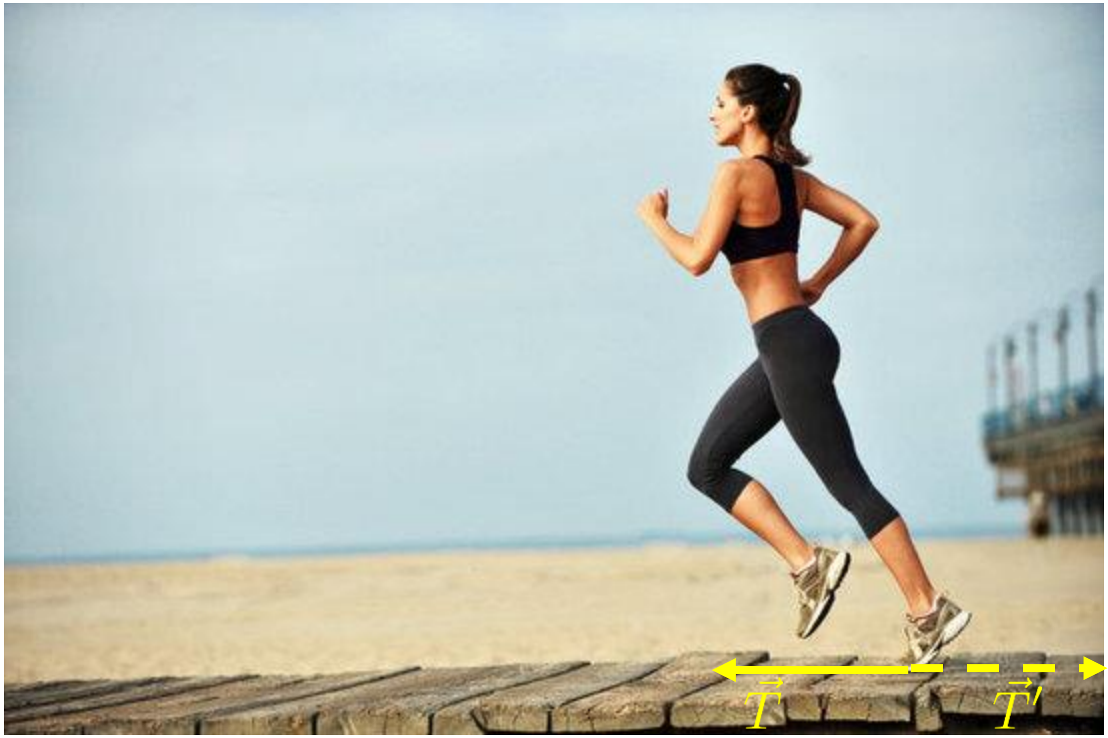
Kritický uhol naklonenej roviny



$$N = G\cos\alpha$$
$$F = G\sin\alpha$$
$$T = fN$$
$$F = T$$
$$G\sin\alpha = fG\cos\alpha$$
$$\tan\alpha = f$$

Kto poháňa chodca? Trenie.





Chodec tlačí na topánku smerom dozadu, ako keby chcel, aby sa topánka šmýkala dozadu. Trenie tomu bráni silou, **ktorá smeruje dopredu**. Na chodca nepôsobí vo vodorovnom smere žiadna vonkajšia sila okrem trenia. Trenie teda poháňa chodca dopredu. Nie je teda pravdou, že trenie vždy pôsobí proti pohybu.

Čo mám garantovane vedieť

- definícia koeficientu trenia
- aká veľká je trecia sila na nedostatočne naklonenej rovine keď sa teleso ešte nešmýka
- popíšte ako umožňuje trenia pohyb chodca