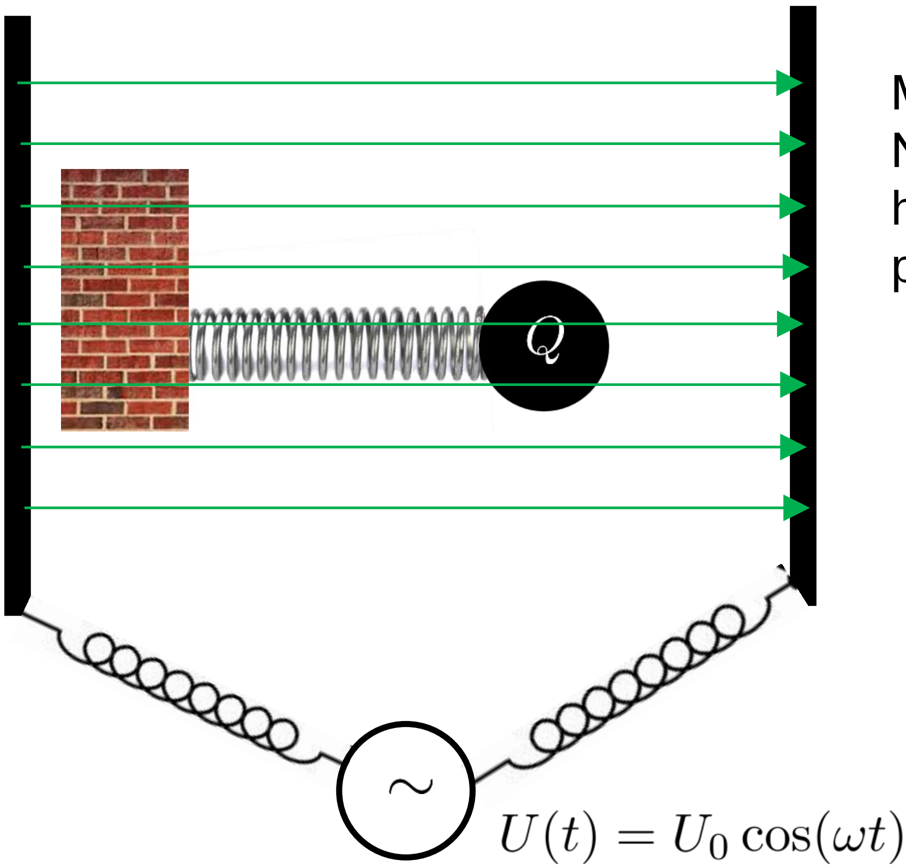
Budený oscilátor s tlmením

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

Špeciálny prípad

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$



Možná realizácia:
Nabité teliesko na nevodivej pružine v homogénnom striedavom elektrickom poli

Budený oscilátor s tlmením

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

Použijeme trik s komplexnými fázormi a pokúsime sa najprv nájsť aspoň jedno riešenie pohybovej rovnice. Zapíšeme ju v komplexných číslach

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t}$$

Skúsime hľadať komplexné riešenie v tvare $x(t) = \tilde{x}_0 e^{i\omega t}$
Po dosadení do rovnice dostaneme

$$-\omega^2 \tilde{x}_0 e^{i\omega t} + 2i\omega b \tilde{x}_0 e^{i\omega t} + \omega_0^2 \tilde{x}_0 e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}$$

$$\tilde{x}_0 = \frac{f_0}{-\omega^2 + \omega_0^2 + 2ib\omega}$$

Dostali sme komplexný fázor $\tilde{x}_0$ s nejakým fázovým posunom voči reálnemu fázoru f_0. Vypočítame veľkosť a fázu fázora $\tilde{x}_0$.

Budený oscilátor s tlmením

$$\tilde{x}_0 = \frac{f_0}{-\omega^2 + \omega_0^2 + 2ib\omega} = |\tilde{x}_0| e^{i\delta}$$

$$\boxed{|\tilde{x}_0| = \frac{|f_0|}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4b^2\omega^2}}}$$

$$|\tilde{x}_0| e^{i\delta} = \frac{f_0}{-\omega^2 + \omega_0^2 + 2ib\omega} = \frac{f_0}{|-\omega^2 + \omega_0^2 + 2ib\omega| e^{i\alpha}}$$

Zjavne platí $\delta = -\alpha$. Fázu menovateľa určíme ľahko, takže dostaneme

$$\boxed{\delta = -\mathrm{atan2}\left(2b\omega, -\omega^2 + \omega_0^2\right)}$$

Budený oscilátor s tlmením

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

Vrátiac sa k reálnym číslam môžeme tvrdiť, že sme našli jedno nejaké špeciálne riešenie pohybovej rovnice

$$x_0(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{f_0}{-\omega^2 + \omega_0^2 + 2ib\omega} e^{i\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(|\tilde{x}_0| e^{i\delta} e^{i\omega t}\right)$$

kde $$|\tilde{x}_0| = \frac{|f_0|}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \qquad \delta = -\mathrm{atan2}\left(2b\omega, -\omega^2 + \omega_0^2\right)$$

Pohybová rovnica je lineárna, takže ak k nájdenému špeciálnemu riešeniu pripočítame ľubovoľné riešenie pohybovej rovnice bez pravej strany, dostaneme tiež nejaké riešenie. Rovnica bez pravej strany je rovnica tlmeného lineárneho oscilátora, jej riešenia poznáme, takže dostaneme

$$\boxed{x(t) = X e^{-t/\tau} \cos(\omega_b t + \beta) + \mathrm{Re}\left(|\tilde{x}_0| e^{i\delta} e^{i\omega t}\right) \ \ \text{kde } \omega_b = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}, \ \ \tau = \frac{1}{b}}$$

V tomto riešení sú parametre X, β ľubovoľné parametere, ktoré treba určiť z počiatočných podmienok

Budený oscilátor s tlmením

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

$$x(t) = Xe^{-t/\tau} \cos(\omega_b t + \beta) + \mathrm{Re}\left(|\tilde{x}_0| e^{i\delta} e^{i\omega t}\right)$$

$$\omega_b = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}, \quad \tau = \frac{1}{b} \quad |\tilde{x}_0| = \frac{|f_0|}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \qquad \delta = -\mathrm{atan2}\left(2b\omega, -\omega^2 + \omega_0^2\right)$$

V tomto riešení sú parametre X, β ľubovoľné parametre, ktoré treba určiť z počiatočných podmienok. Ľahko sa dá presvedčiť o tom, že pre ľubovoľné počiatočné podmienky

$$x_0(t = 0) = A, \quad \dot{x}(t = 0) = B$$

sa dajú nájsť parametre X, β tak, že riešenie spĺňa tie počiatočné podmienky. Tým sme „fyzikálne“ dokázali (fyzika požaduje jednoznačnú predpoveď budúcnosti), že sme našli všetky riešenia pohybovej rovnice. Zapamätajte si poučku **„ľubovoľné riešenie lineárnej rovnice s pravou stranou sa dá písať ako súčet všeobecného riešenia tej rovnice bez pravej strany a nejakého špeciálneho (parciálneho) riešenia tej rovnice s pravou stranou“**

Pripomeňme ešte, že sa zaujímame iba o prípad malého trenia, teda $\omega_0^2 > b^2$.

Budený oscilátor s tlmením

$$x(t) = Xe^{-t/\tau}\cos(\omega_b t + \beta) + \mathrm{Re}\left(|\tilde{x}_0|e^{i\delta}e^{i\omega t}\right)$$

Pozrime sa teraz, ako vyzerá kvalitatívny charakter nájdeného riešenia.
Pre dostatočne dlhé časy, teda $t \gg \tau$. Časť riešenia zodpovedajúca riešeniu bez pravej strany „exponenciálne vymrie“ (prakticky stačí čas t niekoľkokrát τ) a teda po dlhom čase nastane „vynútený pohyb“

$$x_0(t) = \mathrm{Re}\left(|\tilde{x}_0|e^{i\delta}e^{i\omega t}\right)$$

Exponenciálneho vymretiu homogénneho riešenia hovoríme **„prechodový jav“**.

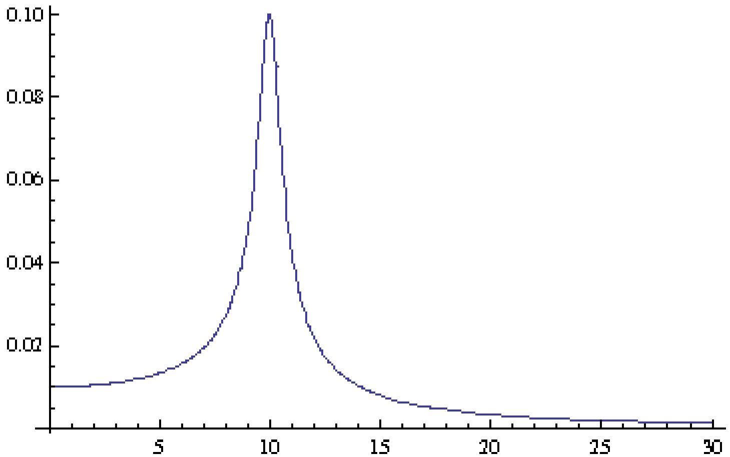
Amplitúda aj fáza vynútených kmitov závisia na vynucujúcej frekvencii, tak ako to ukazujú vzorce

$$|\tilde{x}_0| = \frac{|f_0|}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \qquad \delta = -\mathrm{atan2}\left(2b\omega, -\omega^2 + \omega_0^2\right)$$

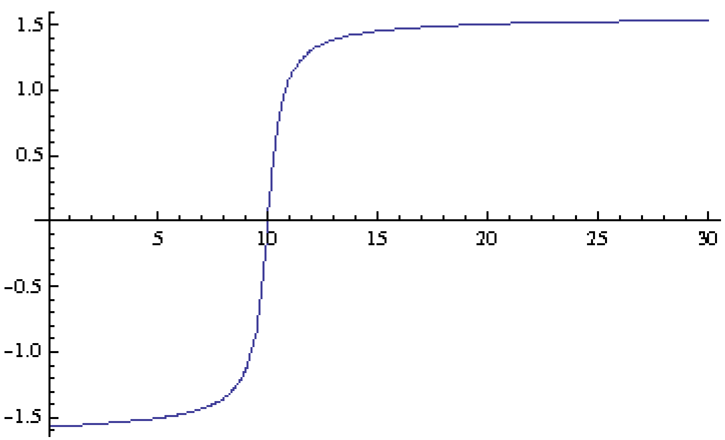
Už prostý pohľad na tie vzorce s cieľom „vyšetriť priebeh funkcie v závislosti na ω" ukazuje, že sa môže diať niečo zaujímavé v oblasti $\omega \approx \omega_0$, kde sú menovatele výrazne malé. Pozrime si najprv numerické obrázky.

Rezonancia

```
Plot[1/Sqrt[(-omega^2+omega0^2)^2+4 b^2 omega^2], {omega, 0., 30.},
 PlotRange → Full]
```




```
Plot[-ArcTan[2 b omega, -omega^2+omega0^2], {omega, 0., 30.}, PlotRange → Full]
```

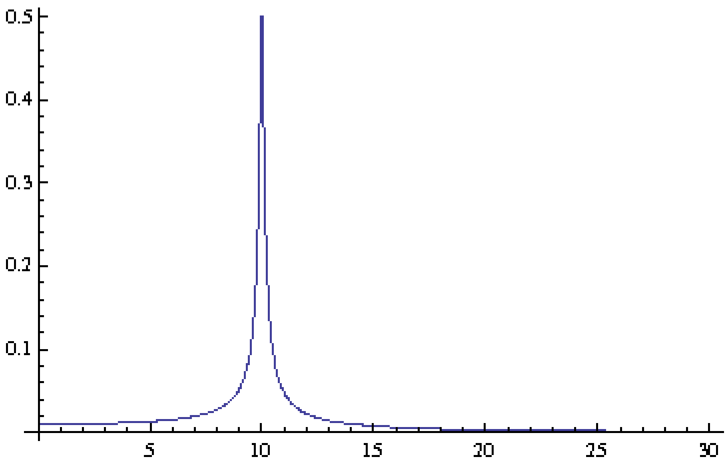


Amplitúda a fáza v závislosti na vynucujúcej frekvencii ω pre hodnoty $\omega_0 = 10, b = 0.5$

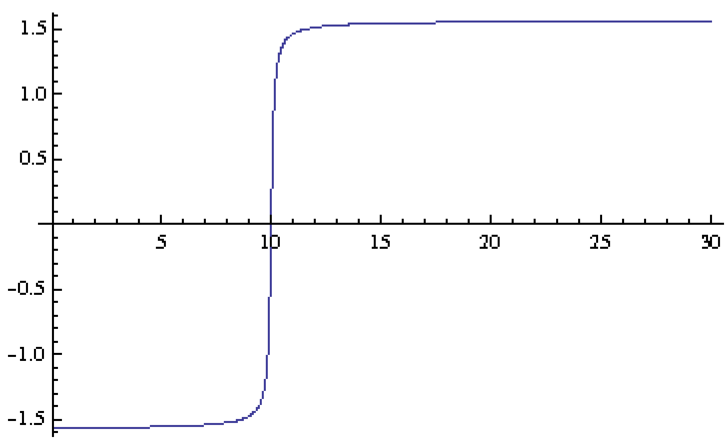
Poznámka.
Obrázky boli nakreslené v programe Mathematica a pre zaujímavosť som do nich nakopíroval aj príslušný plotovací príkaz. I keď nepoznáte jazyk programu Mathematica, prezrite si ten príkaz a zistíte, že porozumiete jeho štruktúru. Nebojte sa lúštiť neznáme veci, je to zábavné, poučné a často nevyhnutné, lebo návody a popisy funkčnosti sú často neúplné alebo dokonca chybné. Otázka **„Ako to funguje?“** patrí do kompetencie fyzika. Všimnite si napríklad, že potrebná funkcia sa nevolá atan2 ale ArcTan.

Rezonancia

```
Plot[1 / Sqrt[(-omega ^2 + omega0^2)^2 + 4 b^2 omega^2], {omega, 0., 30.},
 PlotRange → Full]
```



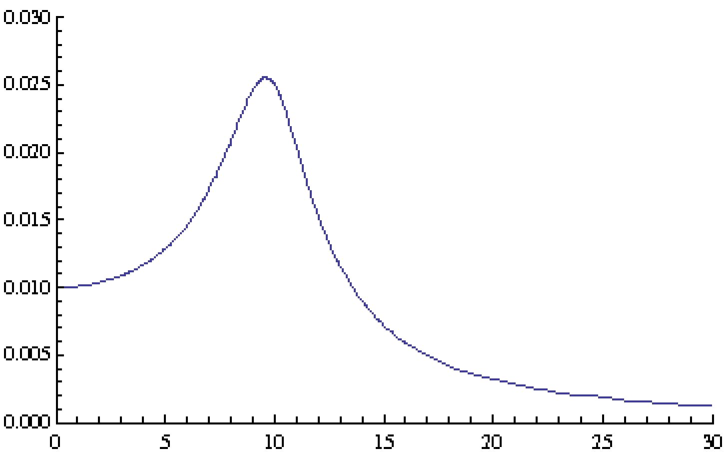

```
Plot[-ArcTan[2 b omega, -omega^2 + omega0^2], {omega, 0., 30.}, PlotRange → Full]
```



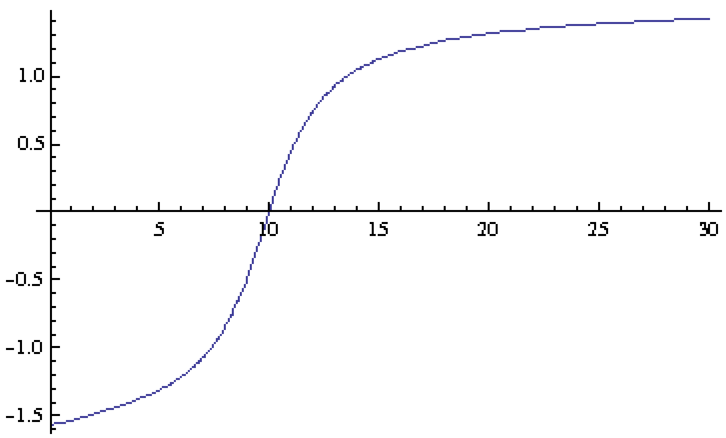
Amplitúda a fáza v závislosti na vynucujúcej frekvencii ω pre hodnoty $\omega_0 = 10, b = 0.1$

Rezonancia

```
Plot[1/Sqrt[(-omega^2 + omega0^2)^2 + 4 b^2 omega^2], {omega, 0., 30.},
 PlotRange → {{0., 30}, {0., 0.03}}]
```



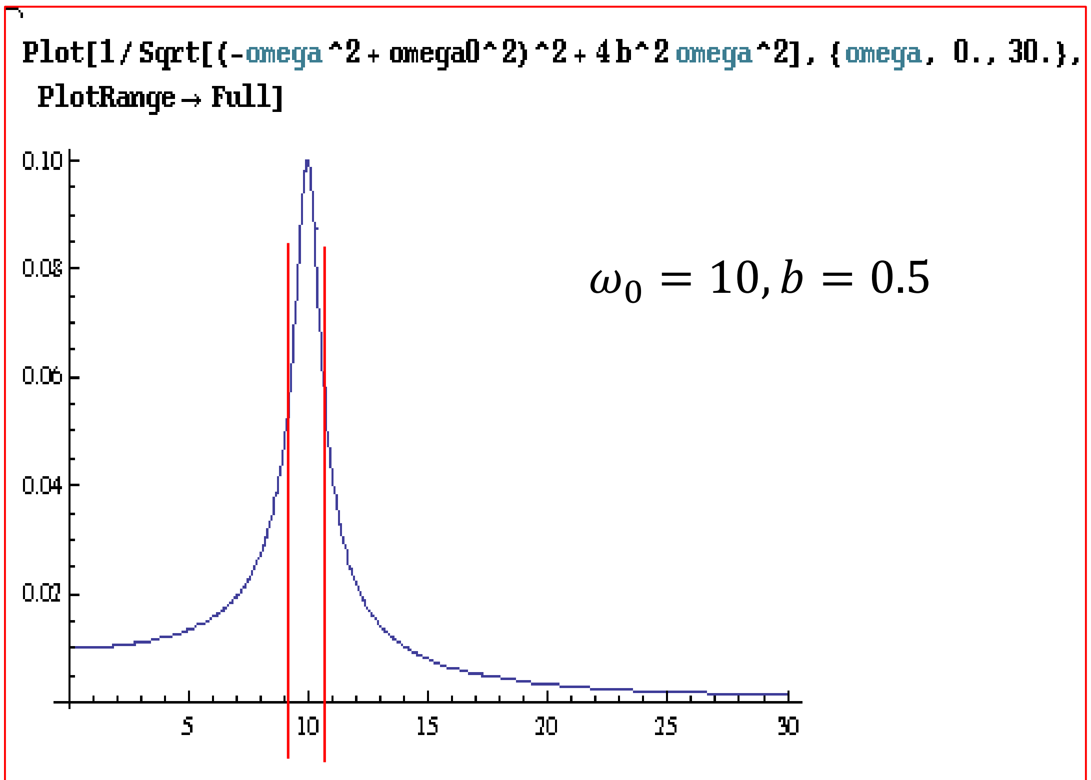

```
Plot[-ArcTan[2 b omega, -omega^2 + omega0^2], {omega, 0., 30.}, PlotRange → Full]
```



Amplitúda a fáza v závislosti na vynucujúcej frekvencii ω pre hodnoty $\omega_0 = 10, b = 2.0$

Rezonancia

Z prezentovaných grafov je zrejmé, že amplitúda vynútených kmitov má výrazné maximum v oblasti, keď frekvencia vynucujúcej sily je blízka k frekvencii vlastných kmitov oscilátora, teda kmitov zodpovedajúcich riešeniu „bez pravej strany“. Tento jav sa volá **rezonancia**. Vidno tiež, že rezonančný pík je veľmi úzky ak koeficient trenia b je malý. Porovnaním obrázkov vidíme, že šírka rezonančného píku má **rádovo** veľkosť $\Delta\omega \approx b$



Na obrázku je „šírka píku“ naznačená zvislými červenými čiarami.

Nedefinovali sme presne, čo nazývame šírkou píku, každý pokus o presnú definíciu by bol značne ľubovoľný. Všimnime si tiež, že ani pojem „frekvencia vlastných kmitov tlmeného oscilátora“ nie je dosť exaktne definovateľná, videli sme, že taká frekvencia je rádovo definovateľná iba s presnosťou

$$|\Delta f|\tau \approx 1 \qquad |\Delta f| \approx b$$

Rezonancia

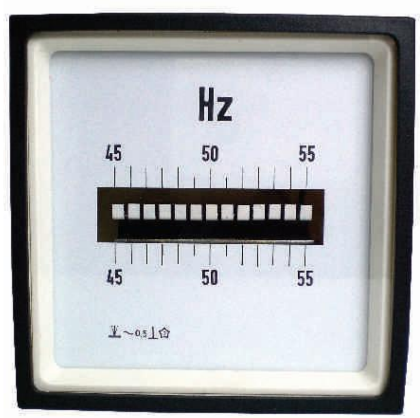
Rezonancia je „ľudovo populárny“ jav. Spomeňme napríklad varovania o pochodujúcom vojsku, ktoré rozkmitá most a stým súvisiaci vojenský príkaz „Zrušiť krok!“ Je to trochu na úrovni ľudovej rozprávky, ale nasledujúce linky na videá na webe ukazujú, že niečo podobné naozaj exituje.

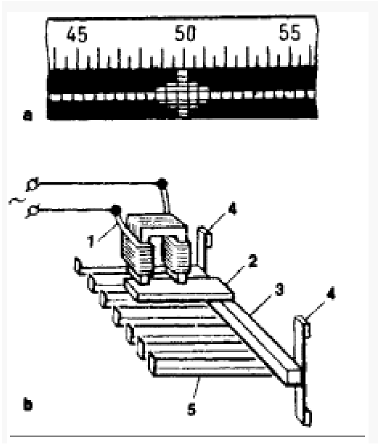
https://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw
https://www.youtube.com/watch?v=eAXVa__XWZ8
https://www.youtube.com/watch?v=uWoiMMLIvco

Problém je v tom, že v učebniciach sa podobné príklady uvádzajú ako ilustrácia pri výklade vynútených kmitov lineárneho tlmeného oscilátora. Rozkmitaný most je matematicky riadne iná káva. I keď pravda je aj taká, že niekde v hlbinách matematiky sa dajú nájsť súvislosti medzi „matematikou oscilátora“ a „matematikou mosta“. Bez vysvetlenia uveďme len mystické zaklínadlo „analytické vlastnosti Greenovej funkcie“ (možno si na to spomeniete pri štúdiu teoretickej fyziky). Ani toto zaklínadlo nevysvetľuje všetko. V tých ukážkach most v Tahome spadol nie kvôli jednoduchému periodickému vynucovaniu ale kvôli vírom vyvolaným vetrom a Miléniový most v Londýne dostal bočné kmity najmä vďaka inžiniermi nepredpokladanej (psychologickej?) spätnej väzbe medzi pohybom davu a reakciami mosta.

O nučo bližšie k jednoduchému oscilátoru majú možno kmitajúce jazýčky v ústnej harmonike (to sú tie bronzové pliešky na obrázku)

Jazýčky podobné tým v ústnej harmonike boli základom mechanických meračov frekvencie, ktoré sa. Meraný prúd prechádzal cievkou, vytváral striedavé magnetické pole s frekvenciou siete. V tom poli bola sada jazýčkov s mierne rozličnými vlastnými frekvenciami v okolí správnej frekvenciu 50 Hz. Cez štrbinu sa pozorovali rozkmity jazýčkov, najviac kmital jazýček, ktorého frekvencia bola najbližšie k sieťovej frekvencii.





Všimnite si, že kmitá viac jazýčkov, v zásade podľa šírky rezonančnej. Ako je to konzistentné! Presnosť frekvencie kmitov jazýčka je daná koeficientom tlmenia. A tá určuje aj šírku rezonančnej krivky. Keby rezonančná krivka bola oveľa užšia, mohli by sme definovať frekvenciu jazýčka ako frekvenciu prúdu, s ktorým je v rezonancii, ktorá sa dá zmerať presne. Ale nejde to! Fascinujúci zážitok pri štúdiu fyziky je zaregistrovať, ako to to všetko „hrá dokopy“. Študujete dva rozličné javy a zistíte medzi nimi prekvapujúce súvislosti. Ako napríklad tu: nemôžete povedať vývojárom „potrebujem jazýček s úzkou rezonančnou krivkou ale silným tlmením“. Prezradíme, že **keby to išlo, tak by budúcnosť mohla ovplyvňovať minulosť**. To sa dozviete na teoretickej fyzike. Nie je to fascinujúce? **Vydržte študovať!**

Ladenie gitary pomocou rezonancie

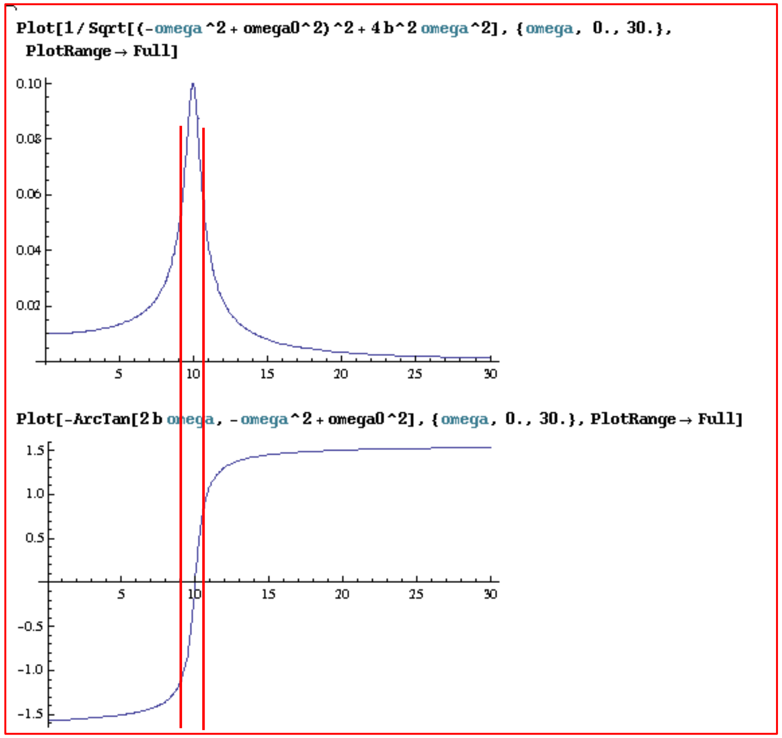
Prezradíme ešte, ako možno (relatívne) naladiť struny gitary, aby akordy nezneli falošne, i keď nemám hudobný sluch. Pomocou rezonancie. Gitara má 6 strún e, a, d, g, h, e. Naladiť ostatné struny relatívne ku strune napríklad a je ľahké.

Ladenie gitary pomocou rezonancie

Stlačím strunu a za štvrtým pražcom, aby znela ako d. Brnkám na takto skrátenú strunu a točím skusmo ladiacim gombíkom struny d dovtedy, kým jemne priloženým prstom na strunu d necítim, že brnkanie na skrátenú strunu a strunu d rozkmitá, teda je v rezonancii, teda je správne naladená voči strune a.

Rezonancia vo fáze

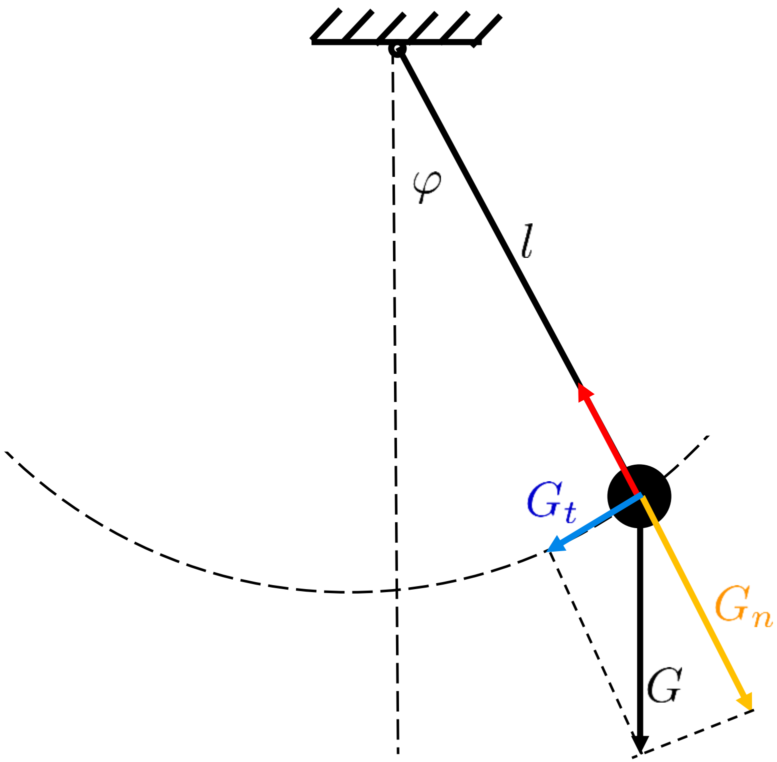
Efekt rezonancie možno poznať i na grafe fázy vynútených kmitov v závislosti na frekvencii vynucujúcej sily. Ako vidno na obrázku, v okolí rezonančnej frekvencie sa fáza abruptne prehupne cez nulu. Udeje sa to päť na úzkom intervale $\Delta\omega \approx b$. Pre nízke a vysoké frekvencie je fáza vynútených kmitov posunutá o $-\pi/2$ resp. $\pi/2$ voči vynucujúcej sile. V oblasti rezonancie sú vynútené kmity a vynucujúca sila vo fáze. Efekt rezonancie vo fáze je ľudovo menej známy ako efekt v amplitúde, ale pri analýze rôznych experimentálnych dát je dôležitý a používaný.



Čo mám garantovane vedieť

- pohybová rovnica tlmeného harmonického oscilátora a jej riešenie
- kvalitatívny popis rezonancie v amplitúde
- popísať nejaký bežný jav, v ktorom sa prejaví rezonanciaq

Matematické kyvadlo



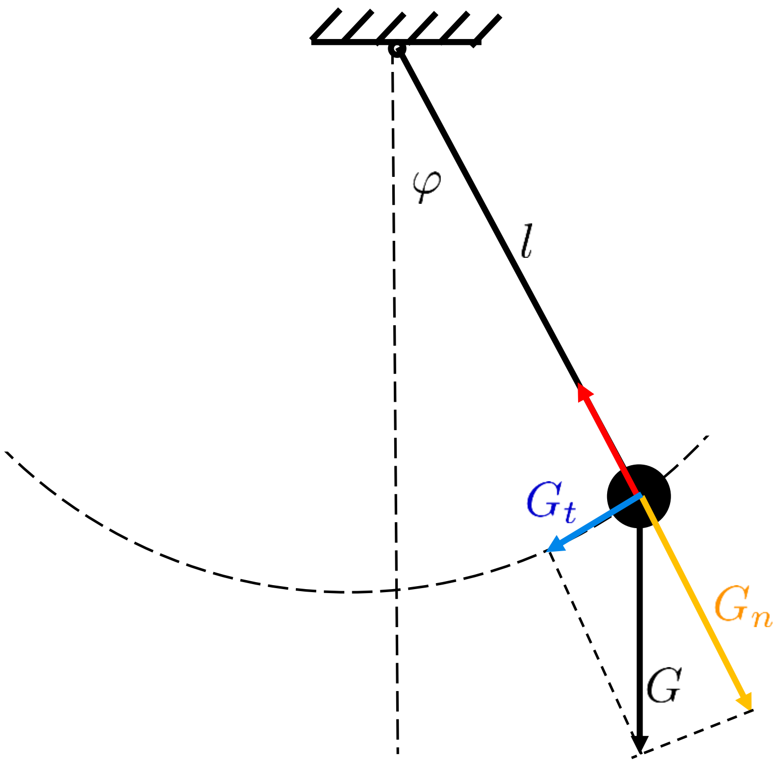
- Hmotný bod na nehmotnom závese dĺžky l (tyčke alebo lanku)
- Trajektóriou je kružnica
- V tangenciálnom smere pôsobí len zložka tiaže o veľkosti $mg\sin(\varphi)$.
- Výchylku hmotného bodu meriame dĺžkou dráhy pozdĺž kružnice
- Dráhu od rovnovážneho bodu doľava chápeme ako kladnú, doprava ako zápornú
- Tangenciálnme zrýchlenie vyjadruje zmenu rýchlosti v dotyčnicovom smere
- pohybová rovnica teda bude

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin(\varphi)$$

- dráhja pozdĺž kružnice sa vyjadruje ako $s = l\varphi$, preto nakoniec dostaneme rovnicu

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{l}g\sin(\varphi)}$$

Matematické kyvadlo



$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{l} g \sin(\varphi)$$

Pre malé uhly platí $\sin(\varphi) \approx \varphi$, takže nakoniec máme

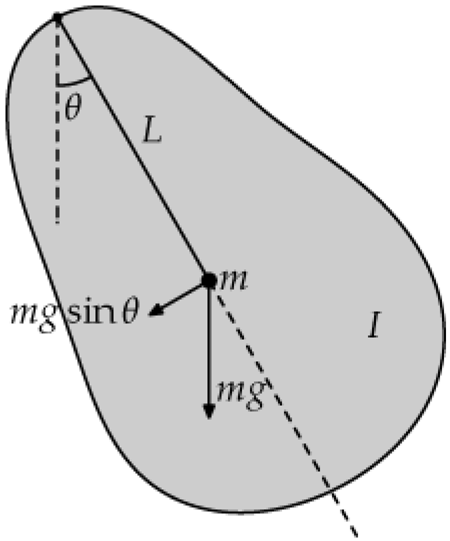
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi$$

Porovnaním s rovnicou harmonického oscilátora

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x = -\omega^2 x$$

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \delta) \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Fyzikálne kyvadlo



Pohybová rovnica tuhého telesa rotujúceho okolo fixnej osi (L je vzdialenosť ťažiska od osi)

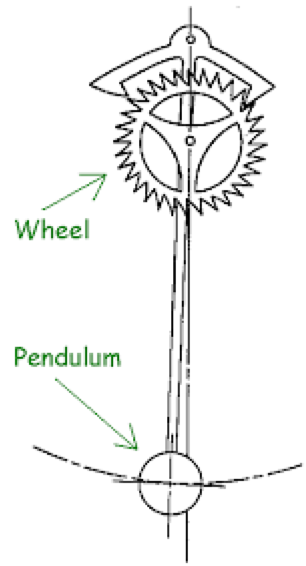
$$I\frac{d}{dt}\omega = N$$

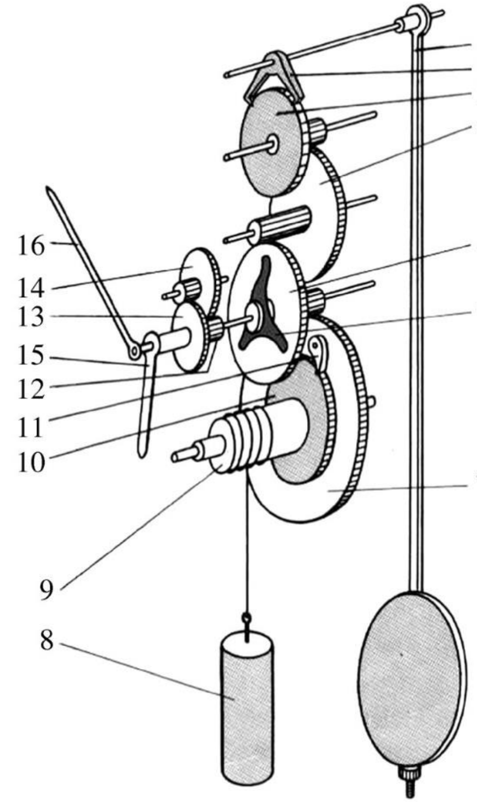
$$I\frac{d^2}{dt^2}\theta = -mgL\sin(\theta) \approx -mgL\theta$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta \approx -\frac{mgL}{I}\theta = -\omega^2\theta$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}}$$


11 12 1
10 2
9 3
8 4
7 6 5


Wheel
Pendulum


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16

Piezoelectric Effect in Quartz