Skúmanie vlastností kubických grafov Ročníkový projekt - report

Michaela Dlugošová

Zimný semester

Dôležité pojmy zimného semestra

Kubický graf - graf, ktorého každý vrchol je incidetný s tromi hranami

Izomorfné grafy - grafy G_1 a G_2 sú izomorfné, ak existuje bijektívne zobrazenie f z množiny $V(G_1)$ do množiny $V(G_2)$ také, že pre všetky vrcholy u, v grafu G_1 platí: $u, v \in E(G_1) \Rightarrow f(u), f(v) \in E(G_2)$ (uvedomme si, že ak sú dva grafy izomorfné, tak majú rovnaký počet vrcholov, rovnaký počet hrán aj rovnaké stupne vrcholov).

Cesta - postupnosť vrcholov, pre ktorú platí, že v grafe existuje hrana z daného vrcholu do jeho následníka. Žiadne dva vrcholy (a teda ani hrany) sa neopakujú

Problém

V roku 1987 Wormald [1] vyslovil *Hypotézu o izomorfnej lineárnej partícii kubických grafov* [1], ktorá hovorí, že ak kubický graf má párny počet hrán, tak sa jeho hrany dajú ofarbiť dvomi farbami tak, že hrany každej farby indukujú množinu ciest a podgraf indukovaný hranami jednej farby je izomorfný s podgrafom indukovaným hranami druhej farby.

Jednoducho povedané - pokiaľ každú hranu ofarbíme na červeno alebo na modro tak, že vytvoríme iba cesty, tak v každej farbe je rovnaký počet ciest každej dĺžky.

Program

Cieľom zimného semestra bolo naprogramovať program, ktorý bude testovať hypotézu na čo najširšej množine kubických grafov v rozumnom čase. Program skúša všetky možnosti zafarbenia pomocou rekurzie, je však potenciál ho v letnom semestri optimalizovať na základe zistení z pozorovania a dokazovania nevyhnutných vlastností grafov.

Vďaka využitiu dátovej štruktúry *set* namiesto pôvodného $vector < vector < int >>$ sa čas skrátil z pôvodných 3 hodín pre grafy so 16 vrcholmi na rádovov 30 minút. V programe je zakomponovaný aj poznatok o deliteľnosti počtu vrcholov 4, vďaka ktorému program okamžite skončí na grafe, na ktorom takéto zfarbenie určite nie je možné. Viac o ňom sa môžete dočítať nižšie. Ďalšie poznatky budú aplikované v letnom semestri.

Vstup a výstup

Za vstup do súboru som si vybrala súbor, ktorý na začiatku obsahuje číslo zodpovedajúce počtu vrcholov a následne niekoľko popisov grafov. Popis grafu pozostáva z v riadkov, pričom v je počet vrcholov daného grafu, v každom sú 3 čísla zodpovedajúce číslam vrcholov, s ktorými má vrchol hranu. Program číta súbor až po jeho koniec.

[1] neorientované grafy

Vstupom je zároveň výstup už existujúceho programu [2] na generovanie kubických grafov o zadanom počte vrcholov. Je upravený len o prvý riadok zodpovedajúci počtu vrcholov daných grafov.

Výstup zapisujeme do súboru - pre každý graf máme samostatný výpis. Výpis pozostáva z množiny vektorov, kde každý reprezentuje počet ciest danej dĺžky pre jednu farbu. Vektor je do množiny pridaný len pokiaľ existuje ofarbenie pre dané dĺžky ciest spĺňajúce zadanie.

```
16
13 14 15
2 3 4
1 3 4
1 2 5
1 2 5
3 4 6
5 7 8
6 8 9
6 7 9
7 8 10
9 11 12
10 12 13
10 11 14
0 11 15
0 12 15
0 13 14

13 14 15
2 3 4
1 3 4
1 2 5
1 2 5
3 4 6
5 7 8
6 8 9
6 7 9
7 8 10
9 11 12
10 13 14
10 13 15
0 11 12
0 11 15
0 12 14

12 14 15
2 3 4
1 3 4
1 2 5
1 2 5
3 4 6
5 7 8
6 8 9
6 7 9
7 8 10
9 11 12
10 13 14
0 10 15
11 14 15
0 11 13
0 12 13
```

(a) Vstup

```
I am processing graph number 1
0 0 1 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 1 0 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 2 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 2 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
I am processing graph number 2
0 0 1 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 1 0 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 2 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 2 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
I am processing graph number 3
0 0 1 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 1 0 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 2 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 2 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
```

(b) Výstup

Figure 1: Vstup a výstup pre grafy so 16 vrcholmi

Podmienka vhodného vstupu

Na to, aby mohlo existovať zafarbenie, **počet vrcholov musí byť deliteľný 4**. Dôvod je veľmi jednoduchý - predstavme si, že máme graf s v vrcholmi. Keďže ide o kubický graf, počet hrán je $\frac{v*3}{2}$, pretože z každého vrcholu idú presne 3 hrany, avšak každú hranu započítame dvakrát (raz za každý z vrcholov, ktoré spája). Každú hranu chceme zafarbiť červenou alebo modrou, pričom požadujeme, aby výsledné podgrafy boli izomorfné. Z definície izomorfných grafov vieme, že počet hrán oboch grafov musí byť rovnaký, čiže počet hrán pôvodného grafu musí byť deliteľný 2. Z toho dostávame požadovanú deliteľnosť 4.

Program na začiatku dostane počet vrcholov každého z grafov v danom súbore a túto podmienku overí. Pokiaľ nie je splnená, výpočet neprebehne.

```
graf by neobsahoval parny pocet hran
```

Figure 2: Výstup pre graf so 6 vrcholmi

Výpočet

Na začiatku priradíme každej hrane neutrálnu farbu - tá reprezentuje nezafarbenú hranu v danom výpočte. Postupne prechádzame hranami od hrán prvého vrcholu až po posledný a ofarbujeme ich najprv jednou farbou, potom druhou a po ofarbení oboma farbami vrátime farbu na neutrálnu (aby sme počas rekurzie mohli danú hranu znovu ofarbovať). Počas vyfarbovania **nedovoľujeme, aby z vrcholu viedli tri hrany rovnakej farby** - tým by bola porušená podmienka, že chceme cesty.

Po vyfarbení všetkých hrán program prechádza všetkými vrcholmi a vždy vezme hranu, ktorá ma inú farbu ako zvyšné dve (to je zabezpečené už počas fázy vyfabovania). Prejde z nej do ďalšieho vrcholu a zvýši dĺžku aktuálnej cesty o 1. V novom vrchole môžu nastať dve situácie - pokiaľ sú zvyšné dve hrany daného vrcholu inej farby, svoj výpočet ukončí a zvýši počet ciest aktuálnej dĺžky o 1. Pokiaľ sú rôznych farieb, vyberie sa ďalej hranou, ktorou do daného vrchola neprišiel a proces opakuje.

Po spočítaní dĺžok všetkých ciest skontroluje, či počty ciest jednotlivých dĺžok pre obe farby sú zhodné. Ak nie, dané ofarbenie nevyhovuje nášmu zadaniu. Ak áno, pridá do množiny výsledkov dané počty. Tieto počty sa po všetkých výpočtoch na danom grafe zapíšu do výsledného súboru.

Prvé výsledky

Nakoľko program vypisoval výpis pre každé korektné zafarbenie grafu, bolo zložité skúmať výsledky a prípadné vlastnosti jednotlivých grafov. Po prerobení programu na pracovanie s množinami sú lepšie čitateľné a na základe nich môžeme mať rôzne pozorovania.

Grafy so 4 vrcholmi majú len jedno možné riešenie

```
I am processing graph number 1
0 0 0 1

I am processing graph number 2
0 0 0 1
```

Figure 3: Výstup pre grafy so 4 vrcholmi

Grafy so 8 vrcholmi majú jednu množinu riešení

```
I am processing graph number 1
0 0 0 2 0 0 0 0

0 0 1 0 1 0 0 0

0 1 0 0 0 1 0 0
I am processing graph number 2
0 0 0 2 0 0 0 0

0 0 1 0 1 0 0 0

0 1 0 0 0 1 0 0
I am processing graph number 3
0 0 0 2 0 0 0 0

0 0 1 0 1 0 0 0

0 1 0 0 0 1 0 0
I am processing graph number 4
0 0 0 2 0 0 0 0

0 0 1 0 1 0 0 0

0 1 0 0 0 1 0 0
I am processing graph number 5
0 0 0 2 0 0 0 0

0 0 1 0 1 0 0 0

0 1 0 0 0 1 0 0
I am processing graph number 6
0 0 0 2 0 0 0 0

0 0 1 0 1 0 0 0

0 1 0 0 0 1 0 0
```

Figure 4: Výstup pre graf so 8 vrcholmi

Grafy so 12 vrcholmi majú dve množiny riešení (program spracoval viac ako 80 grafov)

```
I am processing graph number 1
0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0

0 1 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0

0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0

I am processing graph number 2
0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0

0 1 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0

0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0

I am processing graph number 3
0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0

0 1 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0

0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0

I am processing graph number 4
0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0

0 1 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0

0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0

I am processing graph number 5
0 0 0 3 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0

0 0 2 0 0 1 0 0 0 0 0 0

0 1 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0

0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0

0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0

0 2 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0

I am processing graph number 6
0 0 0 3 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0

0 0 2 0 0 1 0 0 0 0 0 0

0 1 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0

0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0

0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0
```

Figure 5: Výstup pre graf so 12 vrcholmi

V úvode sme si ako príklad ukázali vstup a výstup pre grafy so 16 vrcholmi. Takýchto grafov sme skúmali niekoľko tisíc, takže na spracovanie výsledkov je potrebné nájsť efektívny spôsob.

Pozorovaním doteraz získaných výsledkov môžeme sformulovať hypotézu:
"Pre každý kubický graf existuje ofarbenie vyhovujúce zadaniu také, že obsahuje iba cesty dĺžky najviac 5."

Keďže Carsten Thomassen [3] dokázal, že každý kubický graf vieme ofarbiť dvomi farbami tak, že hrany každej farby indukujú množinu ciest, kde každá cesta má dĺžku najviac 5, podarilo by sa nám rozšíriť tento dôkaz o izomorfizmus jednotlivých podgrafov.

Letný semester[2]

Pokračovanie zo zimného semestra

V letnom semestri sme pokračovali testovaním grafov na 16 a 20-vrcholových grafoch (na tých sme už len skúmali platnosť našej hypotézy *"Pre každý kubický graf existuje ofarbenie vyhovujúce zadaniu také, že obsahuje iba cesty dĺžky najviac 5."*). Keďže výstup už spomínaného generátora grafov mal od 20-vrcholových grafov výstupy iného tvaru, program sme museli upraviť. Zároveň sme ho preprogramovali tak, aby sme názvy súborov mohli zadávať priamo a nemuseli kód otvárať a meniť údaje priamo v ňom. Vygenerovali sme aj vstupy pre 24-vrcholové grafy, avšak prvá desatina bola testovaná viac ako 7 týždňov na serveri. Ďalšie časti sme netestovali.

Dôležité pojmy letného semestra

Rebríky - trieda grafov, pre ktoré platí: $R_n = (V_n, E_n)$ pričom $V_n = \{v_1, v_2, ..., v_n, u_1, u_2, ..., u_n\}$; $E_n = \{u_i v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_1 u_n, v_1 v_n\}$

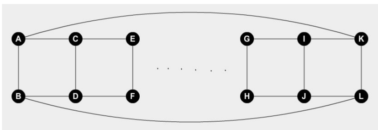


Figure 6: Rebrík

Skrútené rebríky - trieda grafov, pre ktoré platí: $R_n = (V_n, E_n)$ pričom $V_n = \{v_1, v_2, ..., v_n, u_1, u_2, ..., u_n\}$; $E_n = \{u_i v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_1 v_n, v_1 u_n\}$

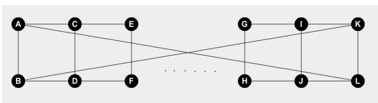
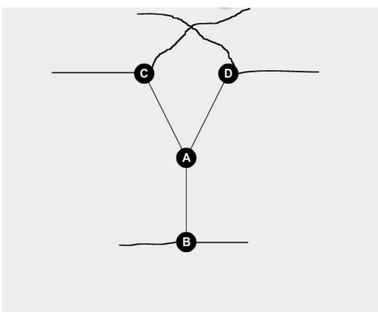


Figure 7: Skrútený rebrík

Isaacsove snarky - trieda grafov, pre ktoré platí: $R_n = (V_n, E_n)$ pričom $V_n = \{a_i, b_i, c_i, d_i | 0 <= i < n\}$ $E_n = \{a_i c_i, b_i c_i, c_i d_i | 0 <= i < n\} \cup \{d_i d_{i+1} | 0 <= i < n\} \cup \{a_i b_{i+1} | 0 <= i < n\} \cup \{b_i a_{i+1} | 0 <= i < n\}$, resp. cyklicky spojíme dipoly Y



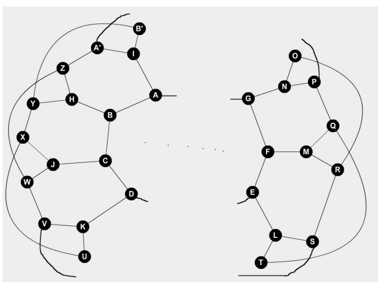


Figure 8: Dipol Y

Figure 9: Isaacsov snark

[2] V tejto časti sú všetky obrázky grafov vytvorené pomocou stránky https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Graph-Creator/

Nová hypotéza

Pripomeňme Wormaldovu *Hypotézu o izomorfnej lineárnej participácii kubických grafov* [1], ktorú sme spomínali už v zimnom semestri. Tá hovorí, že ak kubický graf má párny počet hrán, tak sa jeho hrany dajú ofarbiť dvomi farbami tak, že hrany každej farby indukujú množinu ciest a podgraf indukovaný hranami jednej farby je izomorfný s podgrafom indukovaným hranami druhej farby.

Rovnako pripomeňme Thomassenov dôkaz [3], ktorý hovorí, že každý kubický graf vieme ofarbiť dvomi farbami tak, že hrany každej farby indukujú množinu ciest, kde každá cesta má dĺžku najviac 5. Thomassen zároveň tvrdí, že jediné dva grafy, ktoré vyžadujú aj cesty dĺžky 5 sú dva grafy so 6 vrcholmi.

Keďže grafy so 6 vrcholmi nevyhovujú nášmu zadaniu (počet vrcholov nie je deliteľný 4), my s týmito grafmi nebudeme pracovať. To však znamená, že pre všetky ostatné grafy existuje riešenie, v ktorom stačí použiť cesty dĺžky najviac 4. Rozhodli sme sa spojiť Wormaldovu hypotézu s Thomassenom a sformulovať novú hypotézu, ktorá je silnejšia ako pôvodná:

"Každý kubický graf s párnym počtom hrán sa dá hranovo zafarbiť dvomi farbami tak, že podgrafy indukované jednotlivými farbami sú izomorfné lineárne lesy s cestami dĺžky najviac 4."

Zároveň sme našli kubický graf, ktorému nestačia cesty dĺžky 3, preto sme ďalej hypotézu nemenili. Takým grafom je napríklad graf reprezentovaný ako zoznam susedov:

0 : 9 10 11
1 : 2 3 4
2 : 1 3 4
3 : 1 2 5
4 : 1 2 5
5 : 3 4 6
6 : 5 7 8
7 : 6 9 10
8 : 6 9 11
9 : 0 7 8
10 : 0 7 11
11 : 0 8 10

Testovanie

Všetky pôvodné grafy do 20 vrcholov (vrátane) sme opäť otestovali pre novú hypotézu (teda pôvodný testovací algoritmus sme prerobili tak, aby tetsoval novú hypotézu). Keďže sa ukázalo, že výsledky testovania ju podporujú, rozhodli sme sa ju dokázať pre niektoré triedy grafov.

Rebríky a skrútené rebríky

Algoritmus na ofarbovanie rebríkov *(pre skrútené rebríky je obdobný):*
Majme daný rebrík so $4n$ vrcholmi:

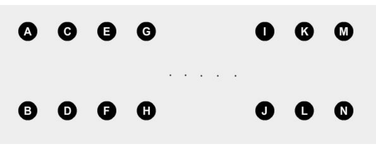


Figure 10: Rebrík so $4n$ vrcholmi

1. Spojíme farbou 1 vrcholy (A, B), (A, M), (B, N)

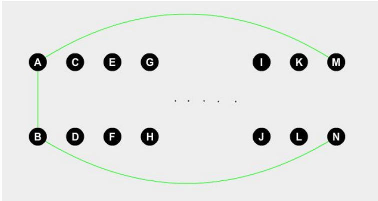


Figure 11: Krok 1

2. Začíname štvoricou $K,\ L\ M,\ N$, kde farbou 2 spojíme vrcholy $(M, N),\ (K, M),\ (L, N)$

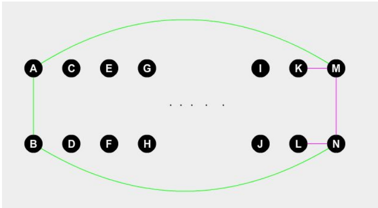


Figure 12: Krok 2

3. Pokračujeme štvoricou "o stĺpec" vľavo, teda štvoricou $I,\ J\ K,\ L$. Tentokrát farbou 1 spojíme vrcholy $(K, L),\ (I, K),\ (J, L)$

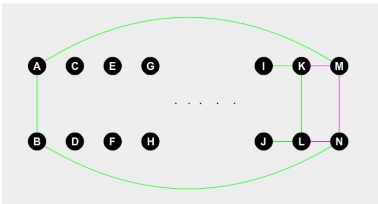


Figure 13: Krok 3

4. Opakujeme kroky 2 a 3 pre ďalšie štvorice, vždy sa posunieme "o stĺpec" vľavo

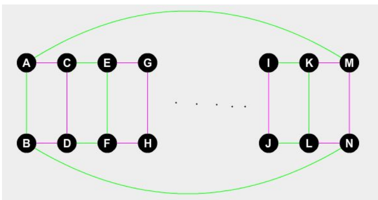


Figure 14: Koniec algoritmu

Veta: Pre rebríky a skrútené rebríky existuje sfarbenie dvomi farbami podľa nášho zadania také, že v každej farbe máme pre graf so $4n$ vrcholmi n ciest dĺžky 3.

Dôkaz *(pre rebríky, pre skrútené rebríky je obdobný):*
Dokážeme indukciou - báza indukcie pre $n = 1$

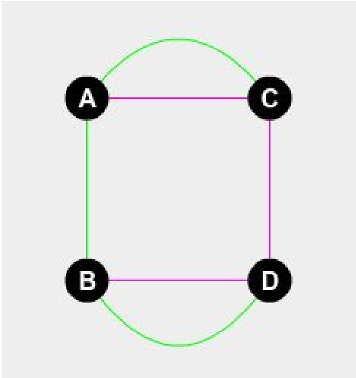


Figure 15: Báza indukcie - $n = 1$

Predpokladajme, že veta platí pre graf so $4n$ vrcholmi. Platí aj pre graf so $4(n+1)$ vrcholmi? Ofarbime graf podľa nášho algoritmu - toto ofarbenie $4n$ vrcholov z indukčného predpokladu ofarbuje hrany tak, že všetko sú cesty, je ich n v každej farbe a všetky sú dĺžky 3.

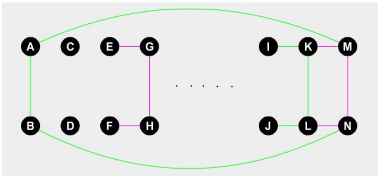


Figure 16: Ofarbenie podľa algoritmu

Ofarbime aj chýbajúce hrany podľa nášho algoritmu.

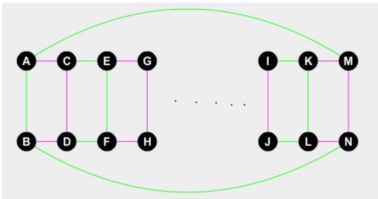


Figure 17: Ofarbenie chýbajúcich hrán

Pridali sme v každej farbe jednu cestu dĺžky 3, čím sme získali dokopy $n + 1$ ciest dĺžky 3 v každej farbe. □

Isaacsove snarky

Algoritmus na ofarbovanie Isaacsových snarkov s vnútorným kruhom párnej dĺžky

1. Spojíme farbou 1 vrcholy (A, B), (B, H), teda vrchol "strednej úrovne" s vrcholom v kruhu a ten s vrcholom v kruhu susedného dipólu Y.

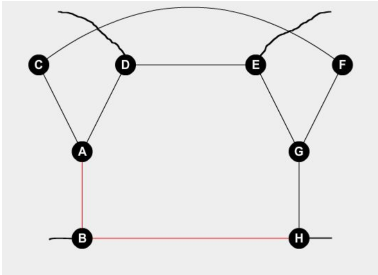


Figure 18: Krok 1

2. Spojíme farbou 2 vrcholy (A, C), (A, D), (C, F) (D, E), teda zvyšná vrcholy vrámci daného dipólu Y a vrcholy "najvyššej úrovne" s vrcholmi "najvyššej úrovne" susedného dipólu Y.

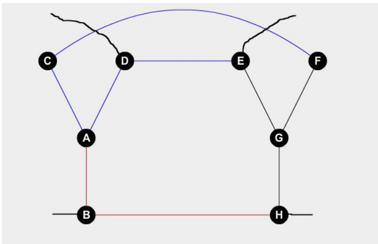


Figure 19: Krok 2

3. Opakujeme pre každý dipól Y. Keďže dipólov Y je párny počet, nikde nedôjde ku konfliktu farieb. Ak je počet dipólov Y x, po ofarbení týmto algoritmom budeme mať x ciest dĺžky 2 a x ciest dĺžky 4 pre každú z ciest.

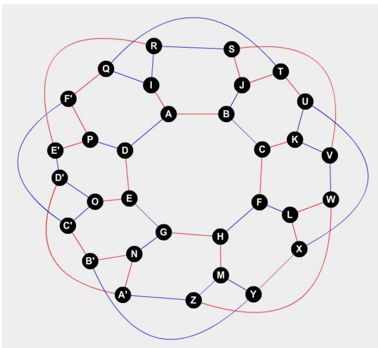


Figure 20: Hotové ofarbenie

Veta: Pre Isaacsove snarky s kruhom párnej dĺžky existuje sfarbenie dvomi farbami podľa nášho zadania také, že v každej farbe máme pre graf so $4n$ vrcholmi n ciest dĺžky 2 a n ciest dĺžky 4.

Dôkaz:
Dokážeme indukciou - báza indukcie pre kruh dĺžky 2

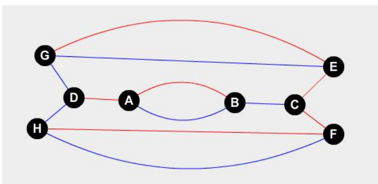


Figure 21: Báza indukcie

Predpokladajme, že veta platí pre graf s kruhom dĺžky x. Platí aj pre graf s kruhom dĺžky $x + 1$?

Ofarbime graf podľa nášho algoritmu - toto ofarbenie $4x$ vrcholov z indukčného predpokladu ofarbuje hrany tak, že všetko sú cesty, je ich v každej farbe x dĺžky 2 a x dĺžky 4.

Ofarbime daným algoritmom aj ďalšie dva dipóly Y, ktoré sme pridali - dokopy sme pridali v každej farbe jednu cestu dĺžky 2 a jednu cestu dĺžky 4. Tým dostávame $x + 1$ ciest dĺžky 2 a $x + 1$ ciest dĺžky 4 pre každú z farieb. □

Záver a vyhliadky do budúcna

Sformulovali sme novú hypotézu, ktorou predpokladáme, že existuje $k = 4$, pre ktoré platí, že každý kubický graf s párnym počtom hrán má rozklad na cesty s dĺžkou maximálne $k = 4$. Okrem toho naším cieľom pre letný semester bolo nie len hyotézu formulovať na základe dosiahnutých výsledkov, ale aj ju dokázať pre niektoré triedy grafov. To sa nám podarilo pre rebríky, skrútené rebríky a Isaacsove snarky s kruhom párnej dĺžky.

Nájsť algoritmus a dôkaz k Isaacsovým snarkom s kruhom nepárnej dĺžky sa nám nepodarilo. Do repozirára na githube [3] sme však pridali súbor, ktorý obsahuje všetky možné zafarbenia grafu s kruhom dĺžky 3. Na základe neho sme sa pokúšali nájsť vhodný algoritmus, ktorý by umožňoval ofarbenie celej triedy grafov.

Okrem toho má však tento ročníkový projekt potenciál pokračovať v budúcnosti dokazovaním hypotézy na ďalších nekonečných triedach grafov poprípade dokázať hypotézu pre všetky kubické grafy vyhovujúce zadaniu.

References

[1] N. Wormald. Problem 13. *Ars Combinatoria*, pages S332–S334, 1987.

[2] M. Meringer. Fast generation of regular graphs and construction of cages. *Journal of Graph Theory 30*, pages S137–S146, 1999.

[3] C. Thomassen. Two-coloring the edges of a cubic graph such that each monochromatic component is a path of length at most 5. *Journal of Combinatorial Theory*, pages S100–S109, 1999.

[3] https://github.com/miskadlugosova/rpgrafy