Cvičenie 1A: Výroky

→ **Úloha 1.** Rozhodnite, ktoré tvrdenia sú výrokmi:

a) Číslo 17 je prvočíslo.

b) $1 + 1 = 3$

c) Každé prirodzené číslo je párne.

d) Dajte mi A z Diskrétnej matematiky!

e) Koľko je hodín?

f) V roku 2047 pristanú ľudia na Marse.

g) Každé párne číslo väčšie ako 2 možno zapísať ako súčet dvoch prvočísel.

h) Tento výrok je nepravdivý.

i) Trenčín a Brezno sú krajské mestá Slovenska.

j) Ak sú čísla $42^{47} + 13$ a 17 prvočíslami, tak číslo $42^{47} + 13$ je prvočíslo.

k) Ak sa Nicolas Cage narodil v apríli, tak ak sa Nicolas Cage narodil v roku 1965, tak sa narodil v apríli.

→ **Úloha 2.** Rozhodnite, či nasledovné zložené výroky sú tautológie.

a) $(a \wedge b) \Rightarrow a$

b) $a \Rightarrow (a \vee b)$

c) $[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c)$

d) $[a \wedge (b \vee c)] \Leftrightarrow [(a \wedge b) \vee c]$

e) $[a \wedge (b \vee c)] \Leftrightarrow [(a \wedge b) \vee (a \wedge c)]$

→ **Úloha 3.** Znegujte nasledovné zložené výroky

a) $a \wedge (b \Rightarrow \neg c)$

b) $(a \Rightarrow \neg b) \vee (\neg c \Leftrightarrow a)$

c) $a \wedge [(b \wedge \neg a) \vee (c \wedge \neg b)]$

Úloha 4. (*) Zjednodušte nasledovné zložené výroky:

a) $[a \vee (\neg b \vee a)] \wedge (\neg a \vee b)$

b) $((b \wedge a) \vee (a \wedge \neg b)) \Rightarrow (c \vee a)$

c) $((b \wedge a) \vee (a \wedge \neg b)) \Rightarrow (c \wedge a)$

→ **Úloha 5.** Vyjadrite operácie $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$ pomocou operácií $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Úloha 6. (*) Vyjadrite operáciu $\vee$ pomocou $\neg$ a $\wedge$.

Úloha 7. (*) Viete nájsť jednu logickú spojku, pomocou ktorej možno vyjadriť všetky logické spojky? Ak áno, skúste vyjadriť $\wedge, \vee, \Rightarrow$ pomocou danej spojky.

→ **Úloha 8.** Iba pomocou výrokových spojok (teda nie pomocou kvatifikátorov, množín a iných vecí) zapíšte výroky, ktoré budú vyjadrovať:

a) Práve jeden z výrokov a, b, c je pravdivý.

b) Práve dva z výrokov a, b, c sú pravdivé.

Úloha 9. Na ostrove žijú poctivci a klamári. Poctivec vždy hovorí pravdu a klamár vždy iba klame. Na brehu ostrova sú Anton a Beáta. Príde k nim cudzinec a pýta sa Antona: „Ste klamár alebo poctivec?“ Anton odpovie nezrozumiteľne. Cudzinec sa otočí k Beate: „Čo hovoril?“ Beáta odpovedá: „Hovoril, že je klamár.“ Čo sú Anton a Beáta? Dá sa to určiť? Mohli niečo také povedať?

Úloha 10. Niekto zo štyroch kamarátov zjedol koláč, ktorý bol pre všetkých. Katka vraví: „Anna zjedla koláč.“ Zuzka: „Ja som zjedla koláč.“ Anna: „Peter ho zjedol.“ Peter: „Anna klame, keď hovorí, že ja som ho zjedol.“ Ak je len jeden z výrokov pravdivý, kto je páchateľ?

Úloha 11. Na vesmírnej lodi sú astronauti a podvodníci. Astronaut vždy hovorí pravdu a podvodník vždy klame. Medzi Červeným, Zeleným a Modrým sa udial nasledovný rozhovor:

Červený: „Zelený je astronaut, ale Modrý je podvodník.“

Zelený: „Červený aj Modrý sú podvodníci.“

Modrý: „Červený aj Zelený sú podvodníci.“

Určte, kto sú astronauti a kto podvodníci.

Úloha 12. Určte, kto je kto po nasledovnom rozhovore:

Červený: „Ak Modrý hovorí pravdu, tak Zelený je podvodník.“

Zelený: „Ak Červený hovorí pravdu, tak Modrý je podvodník.“

Modrý: „Ak je Zelený astronaut, tak Modrý je tiež astronaut.“

Úloha 13. Určte, kto je kto po nasledovnom rozhovore:

Červený: „Žltý je podvodník, no Zelený je astronaut.“

Žltý: „Zelený je podvodník, no Modrý je astronaut“

Zelený: „Modrý je podvodník, no Červený je astronaut“

Modrý: „Zelený je podvodník, no Červený je astronaut.“

Úloha 14. Znegujte nasledovné zložené výroky:

a) $(a \wedge b) \vee (\neg c \wedge d)$

b) $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (c \Rightarrow d)$

c) $a \Rightarrow (b \Rightarrow (c \Rightarrow d))$

d) $((a \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d$

e) $[(\neg a \Rightarrow b) \vee c] \wedge [(d \wedge \neg a) \Rightarrow (e \vee \neg d)]$

Riešenia úloh

2. Tautológia nie je len d). Neplatí pre $v(a) = 1$, $v(c) = 0$.

3.

a) $\neg a \vee (b \wedge c)$

b) $(a \wedge b) \wedge [(c \wedge a) \vee (\neg c \wedge \neg a)]$, resp. $(a \wedge b) \wedge (c \Leftrightarrow a)$, čo sa dá ešte zjednodušiť na $a \wedge b \wedge c$

c) $\neg a \vee [(\neg b \vee a) \wedge (\neg c \vee b)]$, čo sa dá zjednodušiť na $\neg a \vee b \vee \neg c$

4.

a) $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$ alebo $a \Leftrightarrow b$

b) 1 (ide o tautológiu)

c) $\neg a \vee c$

5. $a \Rightarrow b$ je ekvivalentné $\neg a \vee b$
$a \Leftrightarrow b$ je ekvivalentné $(\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)$

6. $a \vee b$ sa dá vyjadriť ako $\neg(\neg a \wedge \neg b)$

7. Z binárnych spojok majú jedinú túto vlastnosť spojky NAND $\neg(a \wedge b)$ a NOR $\neg(a \vee b)$. Pre dôkaz, že vyhovujú, stačí vyjadriť pomocou nich $\neg$ a $\wedge$.

8.

a) $(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c)$

b) $(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c)$

10. Z daných výrokov nevieme páchateľa jednoznačne určiť. Vieme však povedať, že to bol Peter alebo Katka.

11. Červený a Zelený sú podvodníci. Modrý je astronaut.

12. Práve dvaja z nich sú astronauti. Všetky tri kombinácie sú možné.

13. Buď sú všetci podvodníci, alebo Červený a Zelený sú astronauti a Modrý a Žltý podvodníci.

14.

a) $(\neg a \vee \neg b) \wedge (c \vee \neg d)$

b) $(a \Rightarrow b) \wedge c \wedge \neg d$

c) $a \wedge b \wedge c \wedge \neg d$

d) $((a \Rightarrow b) \Rightarrow c) \wedge \neg d$

e) $[\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c] \vee [(d \wedge \neg a) \wedge (\neg e \wedge d)]$