Cvičenie 3B: Množiny

→ **Úloha 1.** Dokážte identity:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $(A - C) - (B - C) = A - (B \cup C)$

Úloha 2. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platia identity:

→ a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,

b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

→ c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

Úloha 3. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platí $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$.

→ **Úloha 4.** Rozhodnite, či pre ľubovoľné množiny A, B, C platí:

a) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$

b) $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow (A \subseteq B \vee A \subseteq C)$

→ **Úloha 5.** Rozhodnite, či pre ľubovoľné množiny A, B, C platí

a) $(A - B) \cup C \subseteq (A \cup C) - B$,

b) $(A - B) \cup C \supseteq (A \cup C) - B$.

Vaše tvrdenia **formálne** dokážte.

> Pre množinu M definujeme *potenčnú množinu* množiny M ako množinu všetkých podmnožín množiny M. Označujeme ju ako $\mathcal{P}(M)$. Teda
>
> $$\mathcal{P}(M) = \{X;\ X \subseteq M\}.$$
>
> Pri dôkazoch teda budeme využívať, že $X \in \mathcal{P}(M) \Leftrightarrow X \subseteq M$.

→ **Úloha 6.** Zistite, ako vyzerá

a) $\mathcal{P}(\{1, 2\})$

b) $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$

Úloha 7. Zistite, v akom vzťahu (rovnosť / inklúzia / žiaden) sú množiny:

a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \cap B)$

b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \cup B)$

Úloha 8. Dokážte, že $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ sa dá pre $n \geq 2$ vyjadriť ako:

a) $A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - (A_1 \cup A_2)) \cup \cdots \cup (A_n - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}))$

b) $(A_1 - A_2) \cup \cdots \cup (A_{n-1} - A_n) \cup (A_n - A_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$

Úloha 9. Nech A, B, C sú množiny.

a) Dokážte, že ak $A \subseteq B$, tak $A \times C \subseteq B \times C$.

b) Ako sa zmenení výsledok z a), ak namiesto $\subseteq$ píšeme $\subsetneq$?

c) Platí aj opačná implikácia?

Úloha 10. Dokážte, že množiny A a B sú disjunktné práve vtedy, keď $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$.

Úloha 11. Dokážte, že nasledovné tri podmienky sú ekvivalentné:

(i) $A \subseteq B$,

(ii) $A \cup B = B$,

(iii) $A \div B = B - A$.

Úloha 12. (*) Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B, C platí:

a) $\mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C) \subseteq \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$,

b) $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$.

Vaše tvrdenia dokážte.

Riešenie úlohy 4

a) platí

b) platí iba $\Leftarrow$, v opačnom smere je kontrapríklad napríklad $A = \{1, 2\}, B = \{1\}, C = \{2\}$.

Riešenie úlohy 6

a) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

b) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Riešenie úlohy 7

Riešenie

Ukážeme, že $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
Dôkaz $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$: Pre všetky X platí:

1. Nech $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
2. $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B)$ (definícia prieniku)
3. $X \subseteq A \wedge X \subseteq B$ (definícia potenčnej množiny)
4. $X \subseteq A \cap B$, lebo každý prvok množiny X sa nachádza v A (vďaka $X \subseteq A$) aj v B (vďaka $X \subseteq B$), teda sa nachádza aj v $A \cap B$.
5. $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ (definícia potenčnej množiny).

Tým sme ukázali, že platí $(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)) \Rightarrow (X \in \mathcal{P}(A \cap B))$.

Dôkaz $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \supseteq \mathcal{P}(A \cap B)$: Pre všetky X platí:

1. Nech $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$
2. $X \subseteq A \cap B$ (definícia potenčnej množiny)
3. $X \subseteq A$ (lebo $X \subseteq A \cap B \subseteq A$)
4. $X \subseteq B$ (lebo $X \subseteq A \cap B \subseteq B$)
5. $X \subseteq A \wedge X \subseteq B$ (lebo 3. a 4.)
6. $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B)$ (definícia potenčnej množiny)

7. $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ (definícia prieniku)

Tým sme ukázali, že platí $(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)) \Leftarrow (X \in \mathcal{P}(A \cap B))$.

Zdôvodnenie šedou sú zrejmé (ide len o použitie definície), môžete ich vynechať. Dôkaz 4. kroku 1. inklúzie možno spraviť viac formálne aj takto:

i. Nech $y \in X$

ii. $y \in A$ (lebo $X \subseteq A$)

iii. $y \in B$ (lebo $X \subseteq B$)

iv. $y \in A \cap B$ (lebo ii. a iii.)

Podobne možno formálne dokázať aj 3. krok (a analogicky aj 4. krok) z 2. inklúzie:

i. Nech $y \in X$

ii. $y \in A \cap B$ (lebo $X \subseteq A \cap B$)

iii. $y \in A$ (definícia prieniku)

Riešenie úlohy 12

Ukážeme, že **a) platí**. Pri riešení využijeme tvrdenie, že $X \subseteq A \cap B \Leftrightarrow X \subseteq (A \wedge X \subseteq B)$. Túto ekvivalenciu sme ukázali na 4. cvičeniach pri riešení úlohu 5a), no nie ja náročné si rozmyslieť, že platí. (Odporúčame, aby ste si takéto veci rozmysleli, lebo napr. ekvivalencia $X \subseteq A \cup B \Leftrightarrow (X \subseteq A \wedge X \subseteq B)$ už neplatí.) Ukázať, že jedna množina je podmnožinou druhej, znamená ukázať, že pre všetky X platí implikácia $X \in \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$. Predpokladajme teda, že pre nejaké ľubovoľné X platí $X \in \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$ a dokážeme, že potom platí aj $X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$.

1. $X \in \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$ (predpoklad)
2. $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \wedge X \notin \mathcal{P}(A \cap C)$ (definícia rozdielu množín)
3. $X \subseteq A \cap B \wedge \neg(X \subseteq A \cap C)$ (definícia potenčnej množiny)
4. $X \subseteq A \wedge X \subseteq B \wedge \neg(X \subseteq A \wedge X \subseteq C)$ (definícia prieniku)
5. $X \subseteq A \wedge X \subseteq B \wedge (X \not\subseteq A \vee X \not\subseteq C)$ (negácia konjunkcie)
6. $X \subseteq A$ (z 5.)
7. $X \not\subseteq A \vee X \not\subseteq C$ (z 5.)
8. $X \not\subseteq C$ (z 6. a 7.)
9. $X \subseteq A \wedge X \not\subseteq C$ (z 6. a 8.)
10. $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \notin \mathcal{P}(C)$ (definícia potenčnej množiny)
11. $X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$ (definícia rozdielu)

Ukážeme, že **b) neplatí**. Nech $A = \{1\}$ a $B = C = \emptyset$. Potom

$$\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}\} - \{\emptyset\} = \{\{1\}\} \not\subseteq \emptyset = \{\emptyset\} - \{\emptyset\} = \mathcal{P}(\emptyset) - \mathcal{P}(\emptyset) = \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C).$$

Poriadne riešenie a) Ukážeme si tiež, ako takéto tvrdenie dokázať bez využívania ekvivalencií o množinách, resp. ako si také tvrdenia vieme dokázať. Nech teda $X \in \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$, potom:

1. $X \in \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$ (predpoklad)
2. $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \wedge X \notin \mathcal{P}(A \cap C)$ (definícia rozdielu množín)
3. $X \subseteq A \cap B \wedge X \not\subseteq A \cap C$ (definícia potenčnej množiny)
4. $X \subseteq A$
   Dôkaz: Pre každé y platí: $y \in X \overset{X \subseteq A \cap B}{\Rightarrow} y \in A \cap B \Rightarrow y \in A$.
5. $X \not\subseteq C$
   Dôkaz: $X \not\subseteq A \cap C \Rightarrow (\exists z)(z \in X \wedge z \notin A \cap C) \Rightarrow (\exists z)(z \in X \wedge (z \notin A \vee z \notin C))$. Z toho, že $z \in X$ a $X \subseteq A$ máme, že $z \in A$. Preto zo $z \notin A \vee z \notin C$ vypláva $z \notin C$. Teda existuje také z, že $z \in X \wedge z \notin C$, preto $X \not\subseteq C$.
6. $X \subseteq A \wedge X \not\subseteq C$ (4. a 5.)
7. $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \notin \mathcal{P}(C)$ (definícia potenčnej množiny)
8. $X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$ (definícia rozdielu)

Komentár opravovateľa Pri opravovaní som až tak nedbal na podrobnosť úprav (aj keď za priveľké myšlienkové skoky som tiež strhával), ale skôr som hodnotil, nakoľko z riešenia vidno, že rozumiete tomu, ako dôkaz takéhoto tvrdenia má vyzerať. To znamená, že vo vašom riešení musí byť dokázaná implikácia $X \in \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$ pre všetky X. To možno zapísať rôznymi spôsobmi. Ak dokazujeme priamo, tak by v riešení malo byť vidno, ako ide reťaz implikácia od platného predpokladu k dokazovanému výroku. V našom riešení je táto reťaz reprezentovaná očíslovanými bodmi, kde každý bod je dôsledkom bodov nad nimi. Ak to nie je jasné, tak k bodom vieme napísať aj na základe čoho sme ich vyvodili. Druhým spôsobom vie byť kreslenie šípok a tak naznačiť, čo sme z čoho dostali.

Dôkaz by nemal vyzerať tak, že máme po papieri roztrúsené tvrdenia, medzi ktorými nevidno tieto vzťahy. Tiež si treba dávať pozor na syntaktické chyby. Napr. nasledovné: $P(A \cap B) \Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$ (množina nemôže byť na ľavej ani pravej strane ekvivalencie), $x \in (x \in A \vee x \in B)$ (prvok nemôže patriť do výroku), $x \in A \subseteq (x \in A \vee x \in B)$ (výrok nemôže byť podmnožinou výroku), spojky $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ môžu byť iba medzi výrokmi a nie pri množinách či ich prvkoch a iné.