Cvičenie 5B: Enumerácie II

→ **Úloha 1.** Janko sa hrá so šachovnicou.

a) Koľkými spôsobmi si môže vybrať 12 čiernych políčok, na ktoré si položí (rovnaké) kamienky?

b) Koľkými spôsobmi si môže vybrať 12 čiernych aj 12 bielych políčok, na ktoré si položí (rovnaké) kamienky?

→ **Úloha 2.** V Športke sa ťahá 7 čísel zo 49. Z nich je šesť čísel riadnych a jedno dodatkové. Koľko existuje rôznych ťahov, ak nezáleží na poradí vytiahnutých riadnych čísel, ale záleží na tom, ktoré číslo je dodatkové?

Úloha 3. Koľkými spôsobmi je možné vybrať skupinu šiestich ľudí zo siedmych mužov a štyroch žien tak, aby v skupine boli a) práve 2 ženy, b) aspoň 2 ženy?

Úloha 4. Koľko priamok je určených šiestimi rôznymi bodmi ak žiadne 3 z nich neležia na jednej priamke?

→ **Úloha 5.** Do firmy s 8 zamestnancami prišla ponuka na školenie. Koľkými spôsobmi možno vybrať skupinu (množinu) zamestnancov, ktorí sa zúčastnia školenia?

→ **Úloha 6.** Koľkými spôsobmi možno rozdeliť 25 žiakov na dva tímy veľkostí postupne 12 a 13 žiakov?

→ **Úloha 7.** Koľkými spôsobmi možno rozdeliť 26 žiakov na dva tímy po 13 žiakov?

Úloha 8. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b\}$, ktoré obsahujú rovnaký počet oboch písmen?

→ **Úloha 9.** Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b\}$, ktoré obsahujú práve 7 výskytov písmena a?

Úloha 10. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c\}$, ktoré obsahujú práve 6 alebo 7 výskytov písmena a?

Úloha 11. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa nekončia trojicou rovnakých písmen?

Úloha 12. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné číslom 4.

Úloha 13. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby bol v každom riadku aj stĺpci párny počet bielych políčok?

> V nasledujúcich úlohách pracujeme s 52 žolíkovými kartami bez žolíkov. Každá karta má jednu zo štyroch farieb (srdcia, káry, piky, trefy) a jednu z trinástich hodnôt (2, 3, ..., 10, dolník (J), kráľovná (Q), kráľ (K), eso (A)). Pod *pokrovou kombináciou* rozumieme množinu piatich kariet.

→ **Úloha 14.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií?

→ **Úloha 15.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií, z ktorých možno vytvoriť postupku piatich kariet rovnakej farby (*straight flush*)?

Úloha 16. Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich štyri karty s rovnakým číslom?

→ **Úloha 17.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich tri karty s číslom x a dve karty s číslom $y \neq x$ (*full house*)?

→ **Úloha 18.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií iných ako *full house*?

Úloha 19. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, v ktorých majú všetky karty rovnakú farbu (*flush*)?

Úloha 20. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, z ktorých možno vytvoriť postupku piatich kariet ľubovoľnej farby (*straight*)?

→ **Úloha 21.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií, ktoré obsahujú trojicu kariet rovnakej hodnoty a zvyšné dve inej hodnoty, navzájom rôznej (*trojica*);

→ **Úloha 22.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich dve karty s číslom x, dve karty s číslom y a jednu kartu s číslom z, pričom $z \neq x \neq y \neq z$ (*dva páry*)?

→ **Úloha 23.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií, ktoré obsahujú aspoň jedno eso?

→ **Úloha 24.** Na večierku je n mužov a n žien. Koľkými spôsobmi sa vedia postaviť do kruhu, ak

a) nie sú žiadne obmedzenia,

b) dve ženy nesmú stáť vedľa seba.

Úloha 25. Za okrúhly stôl s $2n$ stoličkami chceme usadiť n manželských párov. Manželia musia sedieť vedľa seba, ale je jedno, či muž bude napravo od manželky alebo opačne. Koľkými spôsobmi ich môžeme usadiť, ak

a) rozlišujeme stoličky?

b) nerozlišujeme stoličky?

→ **Úloha 26.** Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu dve čierne veže a bieleho kráľa tak, aby žiadna z veží kráľa neohrozovala?

→ **Úloha 27.** Koľkými spôsobmi možno vybrať zo štandardnej sady 32 figúrok nejakú jej časť (nezáleží nám na poradí)?

Úloha 28. Koľkými spôsobmi možno vybrať zo štandardnej sady 32 figúrok nejakú jej časť tak, aby obsahovala aspoň jedného strelca a najviac troch koňov?

→ **Úloha 29.** Na šachovnici stojí všetkých 32 štandardných figúrok. Koľko možných rozostavení možno získať po prehodení práve jednej dvojice figúrok?

→ **Úloha 30.** Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu bieleho a čierneho koňa tak, aby sa navzájom neohrozovali?

Úloha 31. Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu dvoch nerozlíšiteľných koňov tak, aby sa navzájom neohrozovali?

Úloha 32. Koľkými spôsobmi možno rozostaviť na šachovnicu štandardnú sadu 32 figúrok (bez obmedzení daných šachovými pravidlami).

Úloha 33. Koľkými spôsobmi možno rozostaviť na šachovnicu štandardnú sadu 32 figúrok tak, aby všetky biele figúrky boli v riadkoch 1 až 4 a všetky čierne figúrky boli v riadkoch 5 až 8?

Úloha 34. Koľkými spôsobmi možno rozostaviť na šachovnicu štandardnú sadu 32 figúrok tak, aby v každom stĺpci bol práve jeden biely pešiak?

→ **Úloha 35.** Máme 52 kariet: 26 červených a 26 modrých. Koľkými spôsobmi možno z nich vybrať podmnožinu tak, aby v nej bol rovnaký počet červených a modrých kariet?

Úloha 36. V závislosti od $n, k \in \mathbb{N}$ určte, ktoré z čísel

$$\binom{n}{k} \qquad \text{a} \qquad \binom{n}{k+1}$$

je väčšie.

Výsledky

1. a) $\binom{32}{12}$, b) $\binom{32}{12}^2$

2. $\binom{49}{7} \cdot 7$

3. a) $\binom{4}{2}\binom{7}{4}$
b) $\binom{4}{2}\binom{7}{4} + \binom{4}{3}\binom{7}{3} + \binom{4}{4}\binom{7}{2} = \binom{11}{6} - \binom{4}{0}\binom{7}{6} - \binom{4}{1}\binom{7}{5}$

4. $\binom{6}{2}$

5. 2^8

8. $\binom{20}{10}$

9. $\binom{20}{7}$

10. $\binom{20}{6} \cdot 2^{14} + \binom{20}{7} \cdot 2^{13}$

11. $4^n - 4^{n-2}$

12. $9 \cdot 10^{n-1} - 9 \cdot 10^{n-3} \cdot 25$ (pre $n \geq 3$)

13. $2^{(n-1)^2}$

14. $\binom{52}{5}$

15. $9 \cdot 4 = 36$

16. $13 \cdot 48 = 624$

17. $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 3744$

18. $\binom{52}{5} - 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 2595216$

19. $4 \cdot \binom{13}{5} = 5148$

20. $9 \cdot 4^5 = 9216$

21. $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 48 \cdot 44/2 = 54\,912$

22. $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 44 = 123552$

23. $\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$.

26. $64\binom{49}{2} = 75\,264$

27. $(9 \cdot 3^3 \cdot 2^2)^2$

28. $9^2 \cdot 3^2 \cdot (3^2 - 1)^2 \cdot 2^4$

29. $\binom{32}{2} - 2(\binom{8}{2} + 3) + 1$

30. $64 \cdot 63 - (4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8) = 3\,696$

31. $3\,696/2 = 1\,848$

32. $\dfrac{64!}{32! \cdot 8! \cdot 8! \cdot 2^6}$

33. $\left(\dfrac{32!}{16! \cdot 8! \cdot 2^3}\right)^2$

34. $8^8 \cdot \binom{56}{24} \dfrac{24!}{8! \cdot 2^6}$

35. $\sum_{k=0}^{26} \binom{26}{k}\binom{26}{k} = \binom{52}{26}$