Cvičenie 6A: Počítanie súm

Pri počítaní súm sa snažíme nájsť výraz s rovnakou hodnotou, akú má počítaná suma. Výsledný výraz nesmie obsahovať žiadnu sumu alebo súčin s premenným počtom členov. Aké metódy môžeme použiť na dokazovanie súm?

1. Vypočítať si niekoľko prvých členov, na základe nich si tipnúť výsledok a následne dokázať jeho správnosť (napr. matematickou indukciou). Veľa výsledkov je však takých, že nevidno dobre z nich, čo sú zač.
2. Použiť pri výpočte inú, už známu sumu. Často si to vyžaduje upraviť sumu do tvaru vhodného pre aplikáciu známej sumy. To často obnáša
   - použiť kombinatorické identity;
   - rozpísať si kombinačné čísla cez faktoriály a upraviť ich tak, aby sme dostali kombinačné číslo (čísla) vhodné pre sumáciu;
   - vyňatie konštanty pred sumu ($\sum_k c \cdot a_k = c \sum_k a_k$);
   - rozdelenie sumy na viac súm ($\sum(a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k$);
   - substituovať premenné, upraviť tým sumačný rozsah.
3. Upraviť známu sumu obsahujúcu reálnu premennú x (napr. Binomickú vetu) do vhodného tvaru aplikovaním operácie ako sú derivácia alebo integrácia.
4. Nájsť kombinatorickú interpretáciu sumy (teda nejakú úlohu kde počet možností možno počítať riešenou sumou) a prísť k počtu možností iným, jednoduchším spôsobom. Teda ide o to, čo sme trénovali na cvičení 5, len s tým, že máme len jednu stranu rovnosti.

Pri používaní známych súm príde najviac vhod binomická veta.

Veta 1 (Binomická veta)**.** *Pre všetky $a, b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Môžete však používať aj iné známe sumy, napr. tie, čo sa uvádzajú v skriptách alebo v cvičení 5. Ak však používate sumu z cvičenia, ktorá nemá názov, tak súčasťou úplného riešenia by mal byť aj jej dôkaz. Keď používate sumu, ktorá je pomenovaná (napr. Cauchyho sčítací vzorec), uveďte jej názov – vtedy je vidno, že sa odvolávate na niečo známe a taktiež na aké presne tvrdenie sa odvolávate, teda nemusíte písať do riešenia aj dôkaz.

→ **Úloha 1.** Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 2.** Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 3.** Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 4.** Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{n} (3k+1) \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 5.** Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Úloha 6. Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Úloha 7. Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{n} k2^k \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 8.** Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}.$$

Úloha 9. Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{n} 4^k k(k-1) \binom{n}{k}.$$

Úloha 10. Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$

Úloha 11. Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}.$$

Úloha 12. (*) Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \binom{n}{4k}.$$

Úloha 13. (*) Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/5 \rfloor} \binom{n}{5k}.$$

Úloha 14. (*) Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{4k}.$$

Úloha 15. (*) Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \frac{2^k}{k+1} \binom{n}{4k}.$$

Úloha 16. Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \binom{n}{m-k}.$$

Úloha 17. Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!(n-k)!}.$$

Úloha 18. Vypočítajte pre $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$:

$$\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} \binom{k}{2} (n-k)$$

Výsledky

1. 0

2. 4^n

3. $n \cdot 2^{n-1}$

4. $3n \cdot 2^{n-1} + 2^n$

5. $\dfrac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

6. $\dfrac{1}{n+1}$

7. $2n \cdot 3^{n-1}$

8. $n(n-1) \cdot 2^{n-2}$

9. $n(n-1) \cdot 5^{n-2}$

10. $n \cdot 2^{n-1} + n(n-1) \cdot 2^{n-2}$

11. 2^{n-1}

12. $\frac{1}{4}(1+i)^n + \frac{1}{4}(1-i)^n + 2^{n-2}$

13.

14.

15.

16. $\binom{2n}{m}$

17. $\frac{3^n}{n!}$

18. $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2} \cdot 2^{n-3}$ Zdroj: `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~kompisova/uktg1819/du/du02-ries`