Cvičenie 7A: Enumerácie III

Upozornenie

Pri riešení úloh na kombinácie s opakovaním neodporúčame používať vetu z prednášky o ich počte. Pokiaľ sa predsa len rozhodnete v riešení úloh na ňu odvolávať, tak dbajte na nasledovné zásady:

- Musí byť jasné, ako túto vetu používate, teda že čo je množina, z ktorej vyberáte prvky a koľko prvkov z nej vyberáte.
- Musíte použiť naozaj definíciu kombinácií s opakovaním a vetu z prednášky. Je možné, že ste sa stretli (napr. na strednej škole) s inou definíciou kombinácii s opakovaním alebo aj iným vzorcom, napr. $\binom{n+k}{k}$ alebo $\binom{n+k-1}{n}$.

Nestačí len napísať vzorec alebo poznámku „kombinácie s opakovaním“. Riešenia cez vzorec, ktoré nerešpektujú tieto zásady, môžu byť pokladané za neúplné, nakoľko pôsobia, že látke nerozumiete.

→ **Úloha 1.** Na salaši chovajú ovce z deviatich plemien (nekonečne veľa oviec z každého plemena). Ovce rovnakého plemena sú navzájom neodlíšiteľné. Koľko rôznych jedálničkov má k dispozícii medveď, ktorý chce zjesť presne päť oviec?

Uvedieme príklad neúplných riešení tejto úlohy, hoci so správnym výsledkom.

Neúplné riešenie 1

Kombinácie s opakovaním $n = 9$, $k = 5 \to \binom{9+5-1}{5} = \binom{13}{5}$ možností.

V tomto riešení nie je jasné, ako bola použitá veta o kombináciách s opakovaním. Môže ísť o riešenie študenta, ktorý len náhodou správne tipol, že n má byť 9 a k má byť 5. Od úplného riešenia ho nedelí veľa – stačí len podrobnejšie napísať, prečo sme zvolili $n = 9$ a $k = 5$.

Neúplné riešenie 2

Kombinácie s opakovaním $n = 5$, $k = 9 \to \binom{9+5-1}{5} = \binom{13}{5}$ možností.

Toto riešenie má správny výsledok, ale obsahuje dve chyby:

1. Nejde o kombinácie s opakovaním 9-tej triedy z 5 prvkov, ako naznačuje voľba $n = 5$, $k = 9$.
2. Používa nesprávny vzorec pre výpočet počtu kombinácií s opakovaním (v zmysle našej definície)

Síce sa tieto dve chyby navzájom vyrušili.

Správne riešenie

Z (množiny) $n = 9$ plemien vyberáme neusporiadaný súbor (multimnožinu) $k = 5$ plemien, ktorú medveď zje. Kombinácie s opakovaním $\to \binom{9+5-1}{5} = \binom{13}{5}$ možností.

Avšak odporúčame úlohu riešiť nasledovne.

Odporúčané správne riešenie (stručné)

5 oviec, kt. medveď zje $\to$ 5 guľôčok
8 paličiek $\to$ rozdelí guľôčky na 9 úsekov $\to$ z i-teho plemena zje medveď toľko oviec, koľko guľôčok je v i-tom úseku.
Počet usporiadaní 5 guľôčok a 8 paličiek $= \binom{5+8}{8} = \binom{13}{5}$ – vyberieme z 13 miest 8 miest pre paličky (kombinácie bez opakovania)

Všimnite si, že v tomto riešení používame kombinácie **bez opakovania**. Niektorí študenti sa odvolávajú na kombinácie s opakovaním, čo nie je úplne správne. Pôvodná úloha síce o nich je, no toto riešenie je o tom, ako ich zredukujeme na kombinácie bez opakovania.

→ **Úloha 2.** Koľko rôznych jedálničkov má k dispozícii medveď z predchádzajúcej úlohy v prípade, že sa rozhodol držať diétu a zjesť *najviac* štyri ovce?

→ **Úloha 3.** Uvažujme rovnicu

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_p = s,$$

kde $p, s \in \mathbb{N}$ sú parametre. Nájdite počet riešení tejto rovnice v prirodzených číslach a v nenulových prirodzených číslach.

→ **Úloha 4.** Uvažujme nerovnicu

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_p \leq s,$$

kde $p, s \in \mathbb{N}$ sú parametre. Nájdite počet riešení tejto nerovnosti v prirodzených číslach a v nenulových prirodzených číslach.

→ **Úloha 5.** Koľko prešmyčiek je možné vytvoriť zo slova `ANTANANARIVO`?

→ **Úloha 6.** Určte počet 7-ciferných čísel, ktoré majú cifry

a) v klesajúcom poradí,

b) v rastúcom poradí,

c) v nerastúcom poradí,

d) v neklesajúcom poradí.

Úloha 7. Koľkými rôznymi spôsobmi môžeme rozdeliť 10 cukríkov medzi 5 detí?

Úloha 8. V obchode majú 13 druhov keksíkov. Chceme si kúpiť 24 keksíkov tak, aby sme z každého druhu kúpili aspoň jeden. Koľkými spôsobmi to vieme spraviť?

→ **Úloha 9.** Katka, Lenka, Norbert, Marek a Oľga nazbierali 47 nerozlíšiteľných jabĺk. Chcú si ich rozdeliť tak, že Katka a Lenka dostanú párny počet jabĺk a Norbert, Marek a Oľga dostanú nepárny počet jabĺk. Koľkými spôsobmi to môžu spraviť?

Úloha 10. Na poličke je za sebou uložených 12 kníh. Koľkými spôsobmi možno vybrať spomedzi nich 5 tak, aby sme nevybrali žiadne dve vedľa seba?

Úloha 11. Koľkými riešení v obore celých čísel má rovnica $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$

a) ak $x_1 \geq -2$, $x_i \geq 0$, $2 \leq i \leq 4$?

b) ak $x_1 \geq -2$, $x_2 \geq 2$, $x_3 > 0$, $x_4 \geq -1$?

Výsledky

1. $\binom{13}{5}$

2. $\binom{13}{4}$

3. v $\mathbb{N}$: $\binom{p+s-1}{s}$, v $\mathbb{N}^+$: $\binom{s-1}{s-p}$

4. v $\mathbb{N}$: $\binom{p+s}{s}$, v $\mathbb{N}^+$: $\binom{s}{s-p}$

5. $\dfrac{12!}{4! \cdot 3!}$

6. a) $\binom{10}{7}$, b) $\binom{9}{7}$, c) $\binom{9+7}{7} - 1$, d) $\binom{8+7}{7}$

9. $\binom{5+22-1}{22} = \binom{26}{22} = 14\,950$, 2. sada D. Ú. 2019/20

10. $\binom{8}{5} = 56$