Cvičenie 8B: Relácie a operácie s nimi

→ **Úloha 1.** Majme reláciu M z množiny $\{a, b, c, d\}$ do množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a reláciu N na množine $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, ktoré máme zadané nasledovne:

$$M = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 5)\},$$
$$N = \{(1, 1), (1, 3), (1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 5)\}.$$

Vypíšte relácie M^{-1}, N^{-1}, MN, NM, M^+, N^+, M^*, N^* (ak existujú).

Úloha 2. Na množine L všetkých ľudí, ktorá má rozklad $\{M, Z\}$ na mužov a ženy, definujeme relácie:

- D: $aDb \Leftrightarrow a$ je dieťaťom b,
- S: $aSb \Leftrightarrow a$ je zosobášený(-ná) s b.

Pomocou relácií D, S, operácií na reláciách a množinových operácií definujte relácie:

a) je rodičom, ←
b) je matkou, ←
c) je dedkom, ←
d) je súrodencom, ←
e) je bratom,
f) je svokrou, ←
g) je ujom,
h) je sesternicou,
i) je predkom,
j) je príbuzným.

→ **Úloha 3.** Nech D a E sú relácie medzi prvkami množín A a B. Dokážte, že $(D \cap E)^{-1} = D^{-1} \cap E^{-1}$.

→ **Úloha 4.** Nech D je relácia medzi prvkami množín A a B a nech E je relácia medzi prvkami množín B a C. Dokážte, že potom $(DE)^{-1} = E^{-1}D^{-1}$.

Úloha 5. Nech R, R_1, R_2 sú binárne relácie z A do B a S, S_1, S_2 binárne relácie z B do C. Rozhodnite, či vo všeobecnosti platia nasledovné tvrdenia:

a) $R(S_1 \cap S_2) = RS_1 \cap RS_2$
b) $(R_1 \cap R_2)S = R_1S \cap R_2S$
c) $R(S_1 \cup S_2) = RS_1 \cup RS_2$
d) $(R_1 \cup R_2)S = R_1S \cup R_2S$
e) ak $S_1 \subseteq S_2$, tak potom $RS_1 \subseteq RS_2$
f) ak $R_1 \subseteq R_2$, tak potom $R_1S \subseteq R_2S$
g) $R(S_1 - S_2) = RS_1 - RS_2$
h) $(R_1 - R_2)S = R_1S - R_2S$

V prípade, že v niektorom prípade neplatí rovnosť, platí aspoň jedna inklúzia? Platia v c) a d) obrátené implikácie? (Riešenie úlohy si môžete pozrieť v skriptách Olejár, Škoviera na strane 70 (77 v pdf), Veta 4.3).

Úloha 6. Uvažujme relácie $|$ ($(a \mid b$ znamená, že a delí b) a $<$ (menší ako) definované na kladných celých číslach. Nájdite zložené relácie $<|$ a $|<$.

Úloha 7. (*) Uvažujme relácie $|$ a $<$ na celých číslach. Vyjadrite relácie $|<$ a $<|$.