1. bonusová sada domácich úloh

Termín odovzdania: **pondelok 26. 10. 2026, 23:59**

Keďže jednou zo základných vecí, ktorú vás chceme naučiť na tomto predmete, je formulovanie myšlienok a korektné argumentovanie, posunie vás, keď si vyriešite a spíšete viacero rôznorodých úloh. Nasledovné úlohy nemusia (no môžu) priamo súvisieť s preberaným učivom – ide o 5 najľahších úloh Korešpondenčného Matematického Seminára, súťaže určenej pre žiakov stredných škôl.

Aby ste na vymýšľanie riešenia neboli sami, môžete pracovať **v skupinách**. Ba dokonca, bodovanie je nastavené tak, že sa vám oplatí byť vo väčších skupinách.

Skupina môže mať od 1 do 5 členov, označme tento počet n. V rámci skupiny môžete voľne diskutovať a spoločne riešiť všetkých 5 úloh, no s ostatnými skupinami diskutovať **nemôžete**. Následne si každý člen skupiny vyberie **jednu** z úloh, ktorej riešenie spíše a odovzdá (pokiaľ niektorý študent odovzdá viac ako jednu úlohu, hodnotiť sa bude len tá s najnižším číslom úlohy). Tieto úlohy musia byť v rámci skupiny rozličné. Každú úlohu musí človek, ktorý ju spisuje, **spísať sám**. Pokiaľ má nejaké nejasnosti, môže sa poradiť so skupinou, no nikto by nemal riešenie spísať zaňho. **Rovnako ako pri bežných úlohách platí, že študent musí vedieť vysvetliť riešenie, ktoré sám spísal.**

Dokopy takto môže n-členná skupina odovzdať riešenia najviac n úloh. Každá správne vyriešená úloha je ohodnotená 0.5 bodom, pričom každý z členov dostane **súčet** bodov za skupinu. To znamená, že n-členná skupina môže získať **najviac** $n/2$ bodov (takže áno, naozaj sa vám oplatí, aby ste boli viacerí).

DÔLEŽITÉ! Narozdiel od bežných domácich úloh nemôžete nástroje umelej inteligencie používať ani na uvažovanie o problémoch. Je vás v skupine dosť na to, aby ste riešenie vymysleli spolu a niečo sa pri tom aj naučili. Zároveň vám odporúčame, aby ste úlohy riešili niekedy naozaj všetci spoločne – jednak vás to utuží a jednak zistíte, ako rozmýšľajú iní vaši spolužiaci.

Na začiatku každého riešenia jasne uveďte, členmi akej skupiny ste.

Úloha 1. *(0,5 boda)* Denys a Kosťa zapísali do tabuľky 5×5 prirodzené čísla $1, 2, 3 \ldots 25$. Každé číslo napísali práve raz tak, že v každom políčku bolo práve jedno číslo a súčin čísel žiadneho riadka ani stĺpca nebol deliteľný ani 26, ani 34. Ukážte, že v tabuľke existuje riadok alebo stĺpec taký, že súčin jeho čísiel je deliteľný 221.

Úloha 2. *(0,5 boda)* Majme obdĺžnik $ABCD$ a bod P na strane AD tak, aby uhol BPC bol $90°$. Kolmica z bodu A na stranu BP pretína BP v bode M a kolmica z bodu D na stranu CP pretína CP v bode N. Ukážte, že stred obdĺžnika leží na úsečke MN.

Úloha 3. *(0,5 boda)* Majme rekurzívnu postupnosť s prvými členmi $a_1 = \frac{1}{2}$ a $a_2 = 1$ a pre zvyšné členy a_n, kde $n \geq 3$, je definovaná predpisom:

$$a_n = \frac{1 + a_{n-1}}{a_{n-2}}$$

Nájdite súčin $a_1 a_2 a_3 \ldots a_{2026}$.

Úloha 4. *(0,5 boda)* Nech x a y sú kladné celé čísla, pričom $x > y$. V závislosti od x a y vypočítajte pravdepodobnosť, že náhodne zvolený kladný deliteľ čísla 10^x je celočíselným násobkom čísla 10^y.

Úloha 5. *(0,5 boda)* Vzhľadom na $n \geq 4$ nájdite najmenšie vyhovujúce $k \leq n$, alebo zdôvodnite, prečo žiadne také k neexistuje, také, že platí nasledovné tvrdenie: Medzi k náhodne zvolenými vrcholmi pravidelného n-uholníka je možné vybrať štyri vrcholy, ktoré tvoria deltoid.

Poznámka: Deltoid je štvoruholník, v ktorom protiľahlé dvojice vzájomne priliehajúcich strán majú rovnakú veľkosť. Teda ak má štvoruholník strany a, b, c, d tak pre priľahlé dvojice strán a, b a c, d platí $a = b$ a $c = d$.