# Riešenie 1. sady domácich úloh

## Úloha 1

Uvažujme výrok: „Kladné celé číslo je párne práve vtedy, keď každý jeho kladný deliteľ rôzny od jednotky je párny.“

a) Zapíšte tento výrok syntaxou výrokovej logiky (dovolené symboly sú $\forall$, $\exists$, $\in$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^+$, $:$ , $\geq$, $>$, $\leq$, $<$, $=$, $+$, $-$, $\cdot$, $/$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $|$, zátvorky, premenné).

b) Určte pravdivostnú hodnotu tohto výroku. Vaše tvrdenie dokážte.

### a) Zápis pomocou symbolov logiky

Daný výrok môžeme formálne zapísať v tvare

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^+ \colon \big(2 \mid n \iff \forall d \in \mathbb{N}^+ \colon \big((d \mid n \wedge d > 1) \Rightarrow 2 \mid d\big)\big)}.$$

### b) Pravdivostná hodnota výroku

Tvrdenie neplatí pre $n = 6$, pretože deliteľom čísla 6 je aj číslo 3, ktoré je nepárne. Takže uvedené tvrdenie vo všeobecnosti nie je pravdivé.

**Komentár.** To, čo sme napísali vyššie, úplne stačilo napísať do riešenia. Nepravdivosť všeobecného tvrdenia sa najjednoduchšie dokáže príkladom. Preto, ak vieme taký príklad poskytnúť, tak je najistejšie aj tak spísať riešenie.

**Poznámka.** Ďalším zaujímavým protipríkladom je $n = 1$. Číslo 1 nie je párne, ale nemá žiadny kladný deliteľ rôzny od jednotky. Výrok, že každý takýto deliteľ je párny, je preto pravdivý prázdnou platnosťou.

Pre $n = 1$ by sme teda dostali ekvivalenciu

$$\text{nepravda} \iff \text{pravda},$$

ktorá je nepravdivá.

## Úloha 2

Nájdite taký príklad neprázdnej množiny $M$ a výrokových foriem $a(x)$ a $b(x)$, aby sme po ich dosadení do výroku

$$[\forall x \in M \colon (a(x) \Rightarrow \exists y \in M \colon b(y))] \Rightarrow [\exists x \in M \colon (a(x) \Rightarrow \forall y \in M \colon b(y))]$$

dostali a) pravdivý, b) nepravdivý výrok. Správnosť vašich volieb dokážte.

**Riešenie a).** Uvažujme jednoprvkovú množinu $M = \{1\}$, pričom $a(1)$ aj $b(1)$ sú pravdivé. Ukážeme, že potom záver implikácie zo zadania je splnený, čím bude splnená automaticky celá implikácia[1]. Chceme teda ukázať, že existuje $x$, pre ktoré platí implikácia

$$a(x) \Rightarrow \forall y \in M \colon b(y).$$

Zvoľme $x = 1$. Opäť nám stačí ukázať, že pre túto hodnotu je záver implikácie pravdivý. Nuž a výrok $\forall y \in M \colon b(y)$ je pravdivý, pretože pre jediný prvok $y$ množiny $M$, a to jednotku, je $b(y)$ pravdivé.

**Riešenie b).** Uvažujme dvojprvkovú množinu $M = \{1, 2\}$, pričom výrokové formy $a(x), b(x)$ zodpovedajú pravdivostnej tabuľke

| $x$ | $a(x)$ | $b(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 |

Ukážeme, že pre túto voľbu je celá implikácia nepravdivá. Na začiatok, $\exists y \in M \colon b(y)$ je pravdivý, keďže použijeme $y = 1$. Keďže tento výrok je záverom implikácie

$$a(x) \Rightarrow \exists y \in M \colon b(y),$$

je takáto implikácia pravdivá pre ľubovoľné $x \in M$, čo ukazuje že predpoklad implikácie zo zadania, čiže

$$\forall x \in M \colon (a(x) \Rightarrow \exists y \in M \colon b(y))$$

je splnený.

Dostávame sa k záveru implikácie. O výroku

$$\exists x \in M \colon (a(x) \Rightarrow \forall y \in M \colon b(y))$$

chceme ukázať, že je nepravdivý. Existenčný výrok je nepravdivý, keď je nepravdivý pre všetky voľby $x$. Pre $x = 1$ máme, že $a(1)$ je pravdivý a $\forall y \in M \colon b(y)$ nepravdivý – čo ukážeme kontrapríkladom $y = 1$. Pre $x = 2$ obdobne dostaneme, že $a(2)$ je pravdivý a $\forall y \in M \colon b(y)$ nepravdivý.

Dostali sme teda, že predpoklad implikácie zo zadania je pravdivý a záver nepravdivý, čo vedie na to, že celá implikácia je nepravdivá.

**Ako prísť na príklad v b).** Ak má byť implikácia nepravdivá, musí byť jej negácia pravdivá. Znegujme teda negáciu zo zadania. Dostaneme

$$[\forall x \in M \colon (a(x) \Rightarrow \exists y \in M \colon b(y))] \wedge [\forall x \in M \colon (a(x) \wedge \exists y \in M \colon \neg b(y))].$$

Z pravej časti výroku vidíme, že na to musia mať všetky prvky pravdivú hodnotu výrokovej formy $a$ a potrebujeme prvok, pre ktorý je $b$ nepravdivé. Určite preto musíme mať v množine prvok (napr. 1), ktorý spĺňa

| $x$ | $a(x)$ | $b(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |

[1] všimnite si, že nepotrebujeme nič dokazovať o predpoklade

Avšak keďže ľavá časť pre $x = 1$ hovorí, že v množine musí existovať aj prvok, pre ktorý je pravdivé $b$, musíme pridať aspoň jeden. Na to máme dve možnosti:

| $x$ | $a(x)$ | $b(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 |

| $x$ | $a(x)$ | $b(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 |

Teraz už len treba zistiť, či niektorá z nich vyhovuje, a to je v riešení vyššie.

**Komentár opravovateľa.** Všimnite si, že v tom, čo označujeme ako riešenie, nepíšeme žiadne myšlienky, ako sme sa k nemu dostali. Nie je to ani nevyhnutné. Ak totiž ukážeme, že toto je riešenie, a potom ukážeme aj, že funguje, dôkaz je kompletný.

Ba dokonca, ak úlohu píšeme štýlom „ako som na riešenie prišiel“, treba si dať pozor na to, že ho treba aj overiť. V predošlom odseku sme totiž pre novopridaný prvok 2 neoverili, či sa zachovala v platnosti pravá časť výroku (a to by sa vo všeobecnosti nemusela, keďže pri ľavej z tabuliek sa to naozaj pokazí).

No a nakoniec, treba si dávať pozor, na ktorú výrokovú formu sa kvantifikátor viaže. Viacerí z vás ste úlohu riešili, akoby sa kvantifikátory $\forall x, \exists x$ viazali len na výrokovú formu $a(x)$, avšak uzátvorkované je to tak, že sa viažu na celú implikáciu, t. j. napr.

$$a(x) \Rightarrow \exists y \in M \colon b(y).$$

No a to nie je tá istá úloha. Už aj na niektorých úlohách na cvičeniach sme videli, že to, kde sa nachádza kvantifikátor, často mení význam. Takže aj keď možno zadanie by ste očakávali, že kvantifikátor by sa mal viazať len na $a(x)$, nemôžete to predpokladať bez toho, aby to naozaj sedelo aj s uzátvorkovaním.

# Úloha 3

Dokážte, že pre každé kladné celé číslo $n$ platí nerovnosť

$$\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n} < \frac{2^{n+2}}{n}.$$

Tvrdenie dokážeme pomocou matematickej indukcie. V súčtovom zápise chceme dokázať, že

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{i} < \frac{2^{n+2}}{n}$$

pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

### 1. Báza indukcie

Keďže indukčný krok budeme dokazovať pre $k \geq 2$, overíme tvrdenie pre $n = 1$ a $n = 2$.

Pre $n = 1$ dostávame dosadením

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{2^i}{i} = \frac{2^1}{1} = 2,$$

zatiaľ čo

$$\frac{2^{1+2}}{1} = 8.$$

Keďže

$$2 < 8,$$

tvrdenie platí pre $n = 1$.

Pre $n = 2$ dostávame dosadením

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{2^i}{i} = \frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} = 2 + 2 = 4,$$

zatiaľ čo

$$\frac{2^{2+2}}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

Keďže

$$4 < 8,$$

tvrdenie platí aj pre $n = 2$.

**2. Indukčný predpoklad**

Nech $k \geq 2$ je ľubovoľné celé číslo. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $n = k$, teda

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{2^i}{i} < \frac{2^{k+2}}{k}.$$

**3. Indukčný krok**

Ukážeme, že za platnosti indukčného predpokladu tvrdenie platí aj pre $n = k + 1$, čiže chceme dokázať, že

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{2^i}{i} < \frac{2^{k+3}}{k+1}.$$

Oddelením posledného člena súčtu a použitím indukčného predpokladu dostávame

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{2^i}{i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{2^i}{i} + \frac{2^{k+1}}{k+1} \overset{\text{IP}}{<} \frac{2^{k+2}}{k} + \frac{2^{k+1}}{k+1}.$$

Pravú stranu ďalej upravíme:

$$\begin{aligned}
\frac{2^{k+2}}{k} + \frac{2^{k+1}}{k+1} &= 2^{k+1}\left(\frac{2}{k} + \frac{1}{k+1}\right) \\
&= 2^{k+1}\frac{2(k+1)+k}{k(k+1)} \\
&= 2^{k+1}\frac{3k+2}{k(k+1)}.
\end{aligned}$$

Keďže $k \geq 2$, platí

$$3k + 2 \leq 4k,$$

pretože

$$3k + 2 \leq 4k \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \leq k.$$

Teda pokračujeme v úprave pravej strany:

$$2^{k+1}\frac{3k+2}{k(k+1)} \leq 2^{k+1}\frac{4k}{k(k+1)} = \frac{2^{k+3}}{k+1}.$$

Spolu preto dostávame

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{2^i}{i} < \frac{2^{k+2}}{k} + \frac{2^{k+1}}{k+1} \leq \frac{2^{k+3}}{k+1}.$$

Z toho vyplýva

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{2^i}{i} < \frac{2^{k+3}}{k+1},$$

čo je presne dokazované tvrdenie pre $n = k + 1$.

**4. Záver**

Tvrdenie sme overili pre $n = 1$ a $n = 2$. Zároveň sme dokázali, že pre každé celé číslo $k \geq 2$ z platnosti tvrdenia pre $n = k$ vyplýva jeho platnosť pre $n = k + 1$.

Podľa princípu matematickej indukcie preto pre každé kladné celé číslo $n$ platí

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\frac{2^i}{i} < \frac{2^{n+2}}{n}}.$$

ČBTD

# Úloha 4

Rozhodnite a následne dokážte, či nasledovný zložený výrok je tautológia

$$[(a \Rightarrow (b \vee c)) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg d)] \vee [(d \Rightarrow c) \Rightarrow e].$$

## Dôkaz sporom

Sporom ukážeme, že zadaný výrok je tautológia. Pre spor predpokladajme, že to nie je tautológia. To znamená, že pre nejaké ohodnotenie elementárnych výrokov $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ je výrok nepravdivý, teda:

1. $\{[(a \Rightarrow (b \vee c)) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg d)] \vee [(d \Rightarrow c) \Rightarrow e]\} \Leftrightarrow 0$,
2. $(a \Rightarrow (b \vee c)) \Leftrightarrow 0$ (z 1.),

3. $(a \wedge \neg b \wedge \neg d) \Leftrightarrow 0$ (z 1.),
4. $[(d \Rightarrow c) \Rightarrow e] \Leftrightarrow 0$ (z 1.),
5. $a \Leftrightarrow 1$ (z 2.),
6. $(b \vee c) \Leftrightarrow 0$ (z 2.),
7. $(d \Rightarrow c) \Leftrightarrow 1$ (z 4.),
8. $e \Leftrightarrow 0$ (z 4.),
9. $b \Leftrightarrow 0$ (z 6.),
10. $c \Leftrightarrow 0$ (z 6.),
11. $d \Leftrightarrow 0$ (z 7. a 10.),
12. $(a \wedge \neg b \wedge \neg d) \Leftrightarrow (1 \wedge \neg 0 \wedge \neg 0) \Leftrightarrow 1$ (z 5., 9. a 11.).

Všimnime si však, že 3. a 12. hovoria opak, čím sme dostali žiadaný spor. Preto neexistuje ohodnotenie, pre ktoré je výrok nepravdivý, a teda ide o tautológiu. □

## Dôkaz cez zjednodušenie výroku

Zadaný výrok zjednodušíme. Budeme využívať najmä, že $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg x \vee y)$, čiže implikácia je pravdivá práve vtedy, keď jej predpoklad je nepravdivý alebo záver je pravdivý. Okrem toho využijeme distributívny zákon $[x \vee (y \wedge z)] \Leftrightarrow [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$ a fakt, že $(x \vee \neg x) \Leftrightarrow 1$, čiže každý výrok je buď pravdivý, alebo nepravdivý. Dostaneme tak

$$
\begin{aligned}
&\{[(a \Rightarrow (b \vee c)) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg d)] \vee [(d \Rightarrow c) \Rightarrow e]\} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &\{[(\neg a \vee (b \vee c)) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg d)] \vee [(\neg d \vee c) \Rightarrow e]\} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &\{\neg a \vee b \vee c \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg d) \vee [\neg(\neg d \vee c) \vee e]\} \Leftrightarrow \{\neg a \vee b \vee c \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg d) \vee (d \wedge \neg c) \vee e\} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &\{(\neg a \vee b) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg d) \vee c \vee (d \wedge \neg c) \vee e\} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &\{[(\neg a \vee b \vee a) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg d)] \vee [(c \vee d) \wedge (c \vee \neg c)] \vee e\} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &\{[(1 \vee b) \wedge (1 \vee \neg a) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg d)] \vee [(c \vee d) \wedge 1] \vee e\} \Leftrightarrow \{[1 \wedge 1 \wedge (\neg a \vee b \vee \neg d)] \vee c \vee d \vee e\} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &\{\neg a \vee b \vee \neg d \vee c \vee d \vee e\} \Leftrightarrow \{\neg a \vee b \vee c \vee (d \vee \neg d) \vee e\} \Leftrightarrow \{\neg a \vee b \vee c \vee 1 \vee e\} \Leftrightarrow 1.
\end{aligned}
$$

Podarilo sa nám zadaný výrok zjednodušiť na pravdivý výrok nezávisle od hodnôt $a, b, c, d, e$, preto ide o tautológiu. □