1. sada domácich úloh

Termín odovzdania: **utorok 20. 10. 2026, 23:59**

Pozor! Za túto (a aj každú ďalšiu) sadu domácich úloh je možné získať maximálne 2,5 boda, hoc súčet bodov za jednotlivé úlohy je 5 bodov. Bodovanie je tak nastavené zámerne. Máte tak priestor robiť chyby a učiť sa na nich bez toho, aby ste sa museli obávať straty bodov. Využite teda tento priestor a riešte úlohy poctivo, aby ste z nich vyťažili maximum.

Úloha 1. *(1 bod)* Uvažujme výrok: „Kladné celé číslo je párne práve vtedy, keď každý jeho kladný deliteľ rôzny od jednotky je párny."

a) Zapíšte tento výrok syntaxou výrokovej logiky (dovolené symboly sú $\forall$, $\exists$, $\in$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^+$, $:$, $\geq$, $>$, $\leq$, $<$, $=$, $+$, $-$, $\cdot$, $/$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $|$, zátvorky, premenné).

b) Určte pravdivostnú hodnotu tohto výroku. Vaše tvrdenie dokážte.

Úloha 2. *(1 bod)* Nájdite taký príklad neprázdnej množiny M a výrokových foriem $a(x)$ a $b(x)$, aby sme po ich dosadení do výroku

$$[\forall x \in M : (a(x) \Rightarrow \exists y \in M : b(y))] \Rightarrow [\exists x \in M : (a(x) \Rightarrow \forall y \in M : b(y))]$$

dostali a) pravdivý, b) nepravdivý výrok. Správnosť vašich volieb dokážte.

Úloha 3. *(1,5 boda)* Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n platí nerovnosť

$$\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n} < \frac{2^{n+2}}{n}.$$

Úloha 4. *(1,5 boda)* Rozhodnite a následne dokážte, či nasledovný zložený výrok je tautológia

$$[(a \Rightarrow (b \vee c)) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg d)] \vee [(d \Rightarrow c) \Rightarrow e].$$